XII.1.3. Plusy prostopadłe do minusów.

René Descartes (1596-1650) wprowadził układ współrzędnych prostokątnych.
Są to trzy proste wzajemnie prostopadłe i przecinające się w jednym punkcie, zwykle oznaczanym jako zero **(0).**

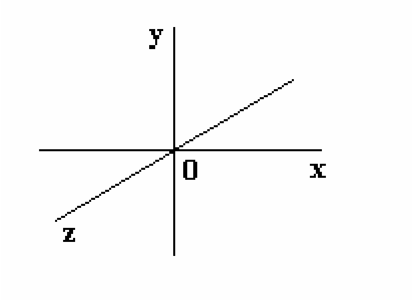

Fig. M.7. Kartezjański układ współrzędnych prostokątnych.
Tym samym, wyznaczonych jest sześć półprostych o wspólnym początku w **0**.
Zauważmy też, że w powyższym układzie współrzędnych prostokątnych nie ma żadnych strzałek (kierunków), ani też „plusów" i „minusów".
Przestrzeń, w której nie wyróżniamy kierunków, także plusów i minusów, lecz badamy własności figur, zwana jest przestrzenią euklidesową, lub arytmetyczną, lub kartezjańską, a nawet zwana jest przestrzenią absolutną.

W podobny sposób, dwie proste wzajemnie prostopadłe i przecinające się w jednym punkcie, wyznaczają płaszczyznę.
Każdej półprostej można przypisać kierunek poprzez zaznaczenie strzałką.
W takim przypadku, można utworzyć dwa po dwa trójwymiarowe układy współrzędnych prostokątnych, których to układów osie współrzędnych są parami wzajemnie <u>przeciwnie skierowane.</u>
Każdy z tych układów jest ósmą częścią kulistej przestrzeni.

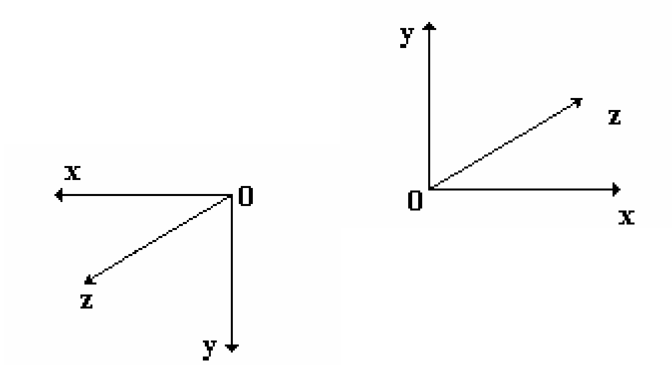

Fig. M.8. Para kartezjańskich trójwymiarowych układów współrzędnych prostokątnych, których osie współrzędnych są parami wzajemnie przeciwnie skierowane.

W wielu (ale nie we wszystkich!) przypadkach wygodne są układy trójwymiarowe, jak na rys. **M.8.** Jest to nasza wygoda, a nie właściwość tego świata!

Jak już wyżej wskazaliśmy, w algebrze wprowadzono pojęcie liczb dodatnich oraz liczb ujemnych. Znaki plus **(+)** oraz minus **(–)** odnoszą się do przeciwnych cech elementów, którym przypisujemy liczby. Stąd z kolei nazwy: liczby dodatnie oraz liczby ujemne.
Natomiast w geometrii, liczby dodatnie i ujemne reprezentowane są graficznie jako dwie <u>przeciwnie skierowane półproste</u> **(Fig. M.1.).**

Jeżeli do geometrii wprowadzimy znaki plus oraz minus, to otrzymamy trójwymiarowe układy współrzędnych prostokątnych o przeciwnych znakach, dokładnie dla przeciwnych kierunków.

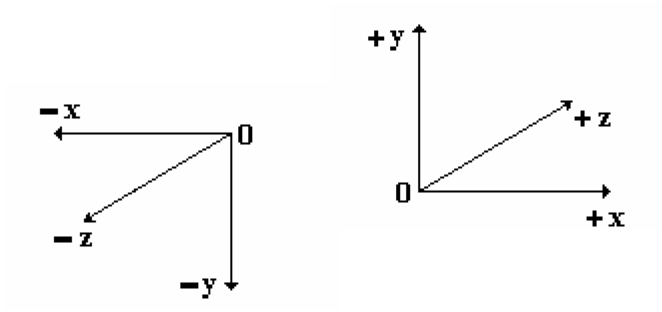

Fig. M.9. Dwa przeciwnych znaków układy współrzędnych prostokątnych.

Jeżeli teraz powyższe dwa układy zsuniemy ze sobą tak, aby miały wspólny początek w **0**, to otrzymamy układ jak niżej.

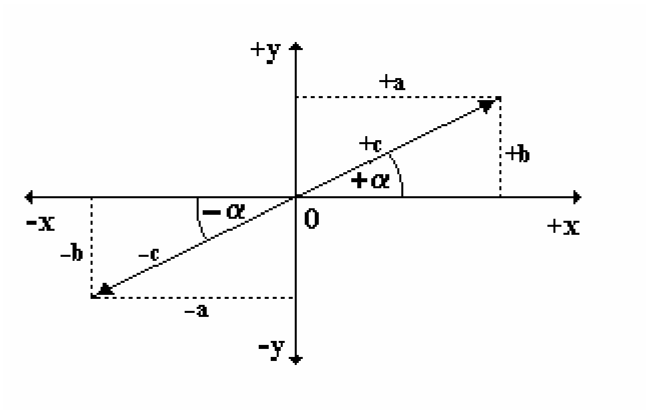

Fig. M.10. Złożenie dwu układów o przeciwnych znakach.
A teraz, uwaga! Optycznie powstał jeden(!) układ, w którym

PLUSY SĄ PROSTOPADŁE DO MINUSÓW !!!

Ale nie jest to prawda, ponieważ na rys. **M.10.** są <u>dwa</u> układy według rys. **M.9.**

Jednak w matematyce rysuje się układy współrzędnych prostokątnych, w których jednak „plusy są prostopadłe do minusów". Dokładnie jak na rys. **M.10.**
Spróbujmy więc zastosować twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wartości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego w układzie według rys. **M.10.**

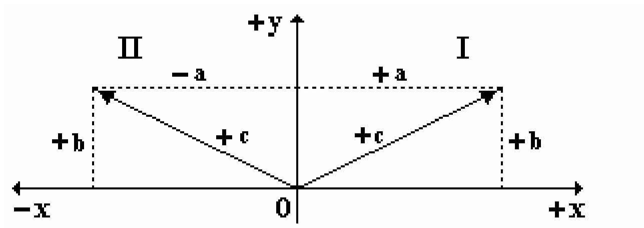

Fig. M.11. Twierdzenie Pitagorasa dla „prostopadłych" liczb dodatnich i ujemnych w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych.

<u>**I ćwiartka**</u>.

$$(+a)^2 + (+b)^2 = (+16) + (+9) = (+25); \quad c = \sqrt{(+25)} = (+5)$$

Dokładnie taką samą wartość liczbową otrzymamy dla **liczb bezwzględnych**.

<u>II ćwiartka.</u>

Mamy: $(-a)^2 + (+b)^2 = ?$

Gdybyśmy zastosowali wskazaną przez nas wyżej regułę, że operacja mnożenia, potęgowania, także operacja pierwiastkowania, nie zmienia znaku tych liczb, to otrzymalibyśmy:

$$(-16) + (+9) = (-7); \qquad c = \sqrt{(-7)} = (-2{,}645...).$$

Jak widać, w tym przypadku nie można zastosować twierdzenia Pitagorasa.

Wobec tego, „uczeni w piśmie" wymyślili dodatkową regułę, według której iloczyn liczb tego samego znaku, tak ujemnych jak i dodatnich, zawsze daje w wyniku liczbę… dodatnią, i wtedy otrzymują:

$$(-a)^2 + (+b)^2 = (+a)^2 + (+b)^2 = a^2 + b^2 = (+c)^2 = c^2$$

czyli <u>dodatnią</u> wartość **c** **(Fig. M.11.).**

Taki samą wartość liczbową otrzymuje się dla **liczb bezwzględnych.**

<u>III ćwiartka.</u>

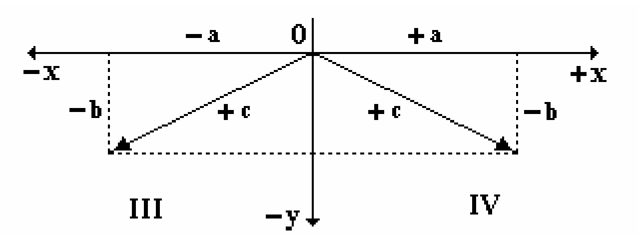

Fig. M.12. Twierdzenie Pitagorasa dla „prostopadłych" liczb dodatnich i ujemnych w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych.

Matematycy otrzymują: $(-a)^2 + (-b)^2 = +c^2$

Natomiast według wskazanej przez nas wyżej reguły, mamy: $(-a)^2 + (-b)^2 = -c^2$.

Z kolei, mamy też: $\sqrt{-c^2} = -c$.

I jest to długość odcinka <u>przeciwnie</u> skierowanego do odcinka (+**c**) w **I ćwiartce.**

Ale matematycy twierdzą, że jest to długość odcinka (boku kwadratu) w II ćwiartce.

W **IV ćwiartce** jest podobnie jak w **II ćwiartce**.

Powyższe trudności wynikają stąd, że pierwotnie twierdzenie Pitagorasa stosowano dla liczb bezwzględnych. Stąd z kolei sugestia, że twierdzenie to odnosi się tylko do operacji dodawania liczb dodatnich.

Ale równie dobrze można przyjąć, że twierdzenie to odnosi się także do sumowania liczb ujemnych.

Nie uwzględnia się także, że sumowanie liczb przeciwnego znaku jest równoważne odejmowaniu liczb bezwzględnych.

Odcinkom przeciwnie skierowanym przypisuje się liczby przeciwnego znaku.

Równie dobrze, liczby przeciwnego znaku można przypisać powierzchniom, np. kwadratom.

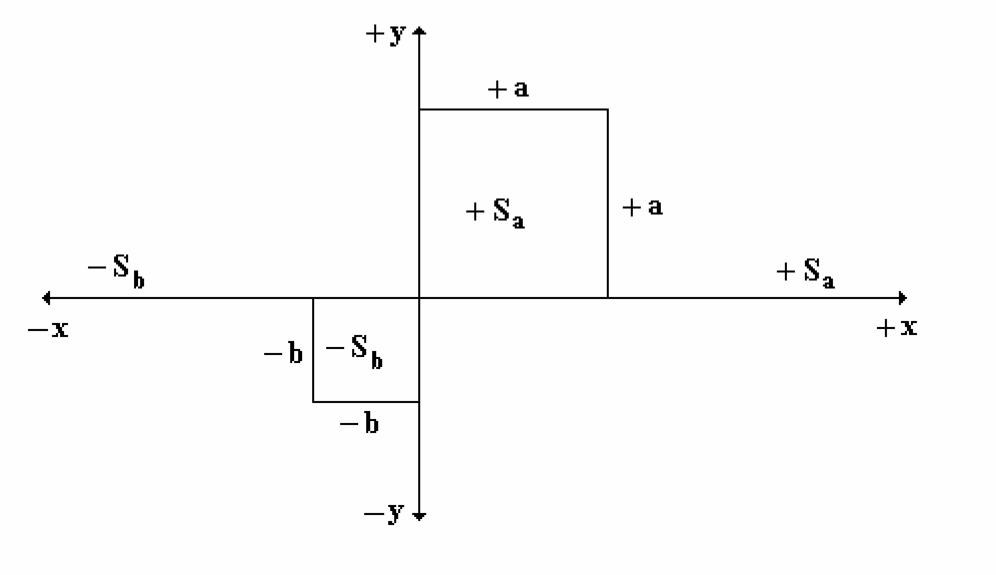

Fig. M.13. Twierdzenie Pitagorasa dla liczb dodatnich i ujemnych.

Pole kwadratu: w I ćwiartce: $\mathbf{S_a = (+a)^2}$, a w III ćwiartce: $\mathbf{S_b = (-b)^2}$.
Pola te możemy przedstawić jako liczby na osiach (+ **x**) oraz (–**x**) (**Fig. M.15.**).
Suma tych pól (twierdzenie Pitagorasa): $\mathbf{a^2 + (-b)^2 = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = c^2}$.
Lub: $\mathbf{S_a + (-S_b) = S_a - S_b = S_c}$.
$\mathbf{S_a}$ **,** $\mathbf{S_b}$ oraz $\mathbf{S_c}$ są <u>liczbami</u>. Identycznie jak liczbami są: **a, b** oraz **c**.

Jeżeli $\mathbf{S_c > 0}$**,** to liczba (+$\mathbf{S_c}$) znajduje się na osi (+**x**) i może być przedstawiona w postaci kawadratu, podobnie jak (+$\mathbf{S_a}$).
Jeżeli $\mathbf{S_c < 0}$**,** to liczba (–$\mathbf{S_c}$) znajduje się na osi (–**x**).