XII.1.2. Rozwiązania urojone.

Matematycy twierdzą, że Karl Friedrich Gauss (1777-1855, astronom, fizyk i matematyk niemiecki) twierdził za życia swego, że każde równanie stopnia **n zawsze ma** dokładnie **n** rozwiązań. Ani mniej, ani więcej.

Uprzejmie „donosimy": powyższego Karl Friedrich Gauss **nie twierdził!**

Ale tak poświadczają (na piśmie!) matematycy, ale już po śmierci K.F.Gaussa, i upierają się, że **każde** równanie **musi** mieć odpowiednią ilość rozwiązań.

Ponieważ, jak wiadomo, nie wszystkie równania mają t.zw. rozwiązania, to matematycy przedstawiają, że jeżeli dane równanie nie ma rozwiązań w dziedzinie t.zw. „liczb rzeczywistych", to ma takie rozwiązania w dziedzinie… „liczb urojonych"!

Powyższe rozpatrzymy na przykładzie równania stopnia drugiego, na które matematycy najczęściej powołują się.

Równanie stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi ma postać:

$$\mathbf{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

Można wykazać, że powyższe równanie przedstawia sobą:

1. zbiór pusty (równanie nie jest spełnione przez żadną parę liczb **x** oraz **y**);
2. punkt;
3. dwie proste (pokrywające się różnie);
4. okrąg ($\mathbf{x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$);
5. elipsę powstającą z okręgu przez powinowactwo prostokątne względem osi **x** lub osi **y:**
($\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + F = 0}$ dla $\mathbf{AC > 0}$, $\mathbf{A \cdot F < 0}$ oraz $\mathbf{A \neq C}$);
6. hiperbolę ($\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + F = 0}$ dla $\mathbf{A \cdot C < 0}$ oraz $\mathbf{F \neq 0}$);
7. parabolę ($\mathbf{Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$ lub $\mathbf{Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$).

W prostokątnym układzie współrzędnych (układ kartezjański) parabola opisana równaniem:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = y} \tag{M.6.}$$

przedstawiona jest na rys. **M.2.**

I. Dla $\mathbf{a > 0}$, czyli dla **(+a)**, ramiona paraboli skierowane są w kierunku **dodatnim** osi **y.**
Dla $\mathbf{a < 0}$, czyli dla **(–a)**, ramiona paraboli skierowane są w kierunku **ujemnym** osi **y.**

II. Oś symetrii **s** paraboli określona jest przez prostą o równaniu (prostopadła do osi **x**):

$$\mathbf{x_o = -\frac{b}{2a}} \tag{M.7.}$$

Dla **a** oraz **b** jednakowego znaku, oś symetrii **s** znajduje się po ujemnej stronie osi **x.**

Dla **a** oraz **b** różnych znaków, oś symetrii **s** znajduje się po dodatniej stronie osi **x.**

Dla $\mathbf{b = 0}$ oś symetrii **s** paraboli pokrywa się z osią **y.**

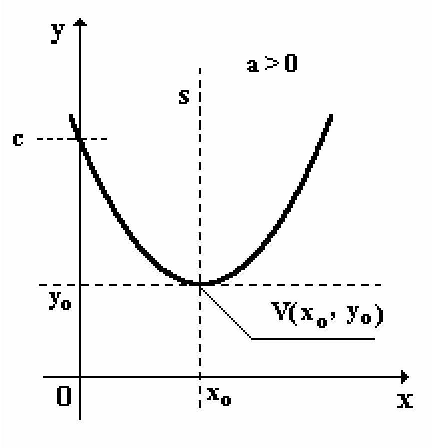

Fig. M.2. Parabola o równaniu: $y = ax^2 + bx + c$

III Współczynnik **c** określa punkt przecięcia paraboli z osią **y.**

IV. Wierzchołek **V** (vertex) paraboli określony jest przez współrzędne:

$$V\left[x_o = -\frac{b}{2a};\quad y_o = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}\right] \qquad \textbf{(M.8.)}$$

gdzie: $$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \textbf{(M.9.)}$$

zwane jest wyróżnikiem równania kwadratowego **(M.6.).**

W ogólności, wykres równania **(M.6.)** przecina się lub nie przecina się z osią **x** w prostokątnym układzie współrzędnych (układ kartezjański).
W celu **sprawdzenia** tego, równanie **(M.6.)** piszemy w postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{(M.10.)}$$

czyli **narzucamy** warunek: $y = 0$, czyli szukamy takich wartości **x**, dla których $y = 0$.

a) jeżeli $\Delta > 0$, to mówi się, że równanie **(M.10.),** posiada dwa rozwiązania (pierwiastki) x_1 oraz x_2, które określają **dwa punkty** przecięcia się paraboli **(M.10.)** z osią **x:**

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = x_o - \sqrt{-\frac{y_o}{a}} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = x_o + \sqrt{-\frac{y_o}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.11.)}$$

Powyższe oznacza, że y_o oraz **a** powinny być przeciwnych znaków.

b) jeżeli $\Delta = 0$, to także $y_o = 0$, i parabola posiada punkt styczności z osią **x** (wierzchołek paraboli).
W takim przypadku, dane równanie paraboli posiada **tylko jeden** pierwiastek **(M.7.)**.
Punkt styczności traktowany jest tu jak podwójny punkt przecięcia: $x_1 = x_2 = x_o$.
Stąd też określenie: podwójne rozwiązanie.

c) Jeżeli $\Delta < 0$, to y_o oraz **a** są tego samego znaku, i parabola **nie przecina się** z osią **x**, a także nie ma punktu styczności z osią **x** (**Fig. M.2.**).
W takim przypadku mówi się, że równanie **(M.10.)** nie ma rozwiązań, **ponieważ nie ma i nie może być liczb** określających położenie punktów przecięcia ramion paraboli z osią **x.**

W przypadku braku t.zw. rozwiązań (parabola nie przecina się z osią **x**), mamy:

$$\left.\begin{aligned} \cancel{x}_1 &= \frac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a} = x_o - \sqrt{+\frac{y_o}{a}} \\ \cancel{x}_2 &= \frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a} = x_o + \sqrt{+\frac{y_o}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.12.)}$$

Powyższe zależności warto, a nawet należy porównać z zależnościami **(M.11.)**.

Rozwiązania (dosłownie!) urojone

Brak rozwiązań według zależności **(M.12.)**, a co wskazywane jest ujemną wartością Δ pod pierwiastkiem, było „inspiracją" do znalezienia jednak rozwiązań, rzekomo na zgodność z twierdzeniem Gaussa, że każde równanie stopnia **n** musi mieć dokładnie **n** rozwiązań.
Ani mniej, ani więcej. Korzysta się tutaj z symbolu $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$ jaki wprowadził L. Euler.

Stosując powyższe, dla warunku $\Delta < 0$ przedstawia się, że jeżeli równanie **(M.10.)** nie posiada rozwiązań w dziedzinie *liczb rzeczywistych* w postaci rozwiązań **(M.11.)**, to posiada rozwiązania w dziedzinie t.zw. *liczb urojonych,* czyli *pierwiastków zespolonych* postaci:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = x_o - i\sqrt{+\frac{y_o}{a}} \\ x_2 &= \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = x_o + i\sqrt{+\frac{y_o}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.13.)}$$

(patrz np.: I. N,. Bronsztejn i K. A. Siemiendiajew – Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, tłum. z ros., PWN 1968, str. 170).

Powyższe jest arbitralnym **dopisaniem (sic!)** liczby $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$ **przed pierwiastkiem** w zależnościach **(M.12.)**. Powoduje to <u>zmianę znaku Δ pod pierwiastkiem</u>.
Tym samym, „rozwiązania" **(M.13.) nie są ani liczbami urojonymi, ani też liczbami zespolonymi!** Dokładnie wbrew zapewnieniom matematyków. Dowód powyższego:

Według definicji liczby **i,** a podanej (osobiście!) przez L. Eulera, mamy:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{+\Delta}}{2a} = x_o - \sqrt{-\frac{y_o}{a}} \\ x_2 &= \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{+\Delta}}{2a} = x_o + \sqrt{-\frac{y_o}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.14.)}$$

i są to „rozwiązania" w dziedzinie liczb całkiem rzeczywistych (!) według zależności **(M.11.).**

Ale, bardzo dokładnie według powyższej „metody matematycznej", możemy (a nawet „musimy"!) wstawić symbol **i** przed pierwiastkami rozwiązań całkiem rzeczywistych, czyli w zależnościach **(M.11.),** i mamy:

$$\left.\begin{aligned} \cancel{x}_1 &= \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{i^2\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a} = x_o - \sqrt{+\frac{y_o}{a}} \\ \cancel{x}_2 &= \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{i^2\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a} = x_o + \sqrt{+\frac{y_o}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.15.)}$$

I są to bardzo dokładnie „rozwiązania" postaci (M.12)!

Czyli… brak rozwiązań!

Dalej wykażemy, że zależności **(M.13.), (M.14.)** oraz **(M.15.)** odnoszą się do **zmienionych** równań paraboli według zależności **(M.10.).**

Translacja paraboli

Powtórzmy: pisanie równania **(M.6.)** w postaci **(M.10.)** oznacza, że szukamy punktów, czyli liczb $\mathbf{x_1}$ oraz $\mathbf{x_2}$ im przypisanych **na osi x,** a nie gdziekolwiek indziej. Ma to na celu **sprawdzenie**, i bez wykonywania wykresu, czy dana parabola:

– przecina się z osią **x** (**dwa** rozwiązania **(M.11.)**;

– ma jeden punkt wspólny z osią **x** (**jedno** podwójne rozwiązanie **(M.7.)**;

– nie przecina się i nie ma punktu wspólnego z osią **x** (**nie ma** rozwiązań w postaci zapisu **(M.12.)**, a co nazywane jest brakiem rozwiązań).

I nic więcej! Bardzo dokładnie nic więcej!

W przypadku ujemnej wartości **Δ,** czyli braku rozwiązań postaci **(M.11)**, zapis **(M.12.)** właśnie braku rozwiązań „modyfikowany" jest przez matematyków do postaci *zespolonych* zależności **(M.13.),** czyli **(M.14.).** Rozpatrzmy więc co następuje.

„Rozwiązania" **(M.14.)** oraz **(M.15.)** otrzymuje się w wyniku zmiany znaku **Δ** pod pierwiastkiem, odpowiednio w zależnościach **(M.12.)** oraz **(M.11.).** A to wyłącznie poprzez <u>dopisanie</u> liczby **i** przed pierwiastkiem.

Ale <u>zmiana znaku **Δ**</u> (a tym samym zmiana znaku $\mathbf{y_o}$ **; Eq. M.8.**) <u>jest bardzo dokładnie równoważna dodaniu wartości</u> **(±2Δ)** oraz $\dfrac{(\mp 2\mathbf{y_o})}{\mathbf{a}}$, pod odpowiednimi pierwiastkami zależności **(M.11.)** oraz **(M.12.).**

Załóżmy, że dane równanie nie ma rozwiązań według zależności **(M.12.).**

Dopisując pod pierwiastkami (2Δ) znajdujemy „rozwiązania" **(M.14.)**, czyli „rozwiązania" **(M.13.),** czyli rozwiązania **(M.11.).**
Ale powyższe oznacza translację paraboli wzdłuż osi **y** dokładnie o wartość **(–2y$_o$),** a co zostało przedstawione na rys. **M.3.**
Parabola została przesunięta w dół, i… przecięła się z osią **x-ów.**
I w ten oto „prosty sposób" znalazły się „rozwiązania" całkiem rzeczywiste, a nie urojone!

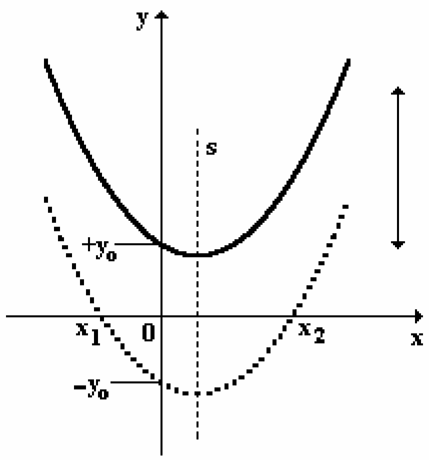

Fig. M.3. Translacja paraboli o $(\mp 2\mathbf{y_o})$.

Ale przesunięta parabola nie jest już tą samą parabolą: jest parabolą o **innym równaniu!**
A oto dowód powyższego.
W szczególności, jeżeli równanie postaci (**Fig M.3.**)

$$+ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a > 0) \qquad \text{(M.16.)}$$

nie ma rozwiązań x_1 oraz x_2 (**Eqs M.12.**, parabola o ramionach skierowanych do góry znajduje się **ponad** osią **x-ów)**, to przesunięcie paraboli w dół o wartość ($-2y_o$) powoduje, że wierzchołek paraboli znajdzie się pod osią **x**-ów, a powyższe równanie przyjmuje postać:

$$ax^2 + bx + (c - 2y_o) = 0 \qquad \text{(M.17.)}$$

i parabola ma punkty przecięcia x_1 oraz x_2 , czyli rozwiązania **(M.14).**.

Ale równanie (M.17.) NIE JEST JUŻ równaniem (M.16)!

Oczywiście, przesuniętą w dół parabolę możemy z kolei przesunąć w górę, czyli w równaniu **(M.17.)** dodać w nawiasie **($+2y_o$).** Otrzymamy z powrotem równanie **(M.16.),** a parabola znajdzie się ponad osią **x-ów.**
A to oznacza… „brak rozwiązań" według zależności **(M.15.)!**

Jako przykład, na który matematycy bardzo lubią powoływać się, rozpatrzmy równanie następującej postaci:

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{(M.18.)}$$

Mamy więc: $a = +1 > 0$; $b = 0$ oraz $c = +1 > 0$.
Ponadto: $x_o = 0$; $\Delta = -4 < 0$ oraz $y_o = +1 > 0$.

Równanie **(M.18.)** nie ma rozwiązań, czyli parabola nie przecina się z osią **x**, ponieważ wierzchołek paraboli znajduje się ponad osią **x**-ów **($y_o > 0$)** oraz ramiona skierowne są w dodatnim kierunku osi **y** **($a > 0$).**

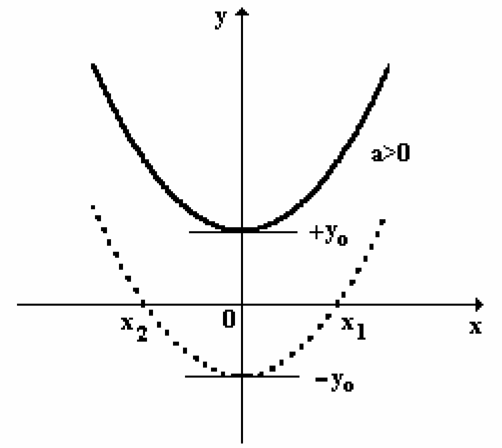

Fig. M.4. Translacja paraboli **(Eqs M.18.** oraz **M.20.**).

Brak rozwiązań możemy zapisać za pomocą zależności **(M.12.),** i matematycy piszą:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-\sqrt{-4}}{2} = -\sqrt{-\frac{4}{4}} = -\sqrt{-1} = -i \\ x_2 &= \frac{+\sqrt{-4}}{2} = +\sqrt{-\frac{4}{4}} = +\sqrt{-1} = +i \end{aligned}\right\} \qquad \text{(M.19.)}$$

zaklinając się „na wszystkie świętości", że istnieją *liczby urojone* nie tylko dodatnie, ale także ujemne **(Eqs M.4.)**, a które (ponoć) są jak najbardziej „rzeczywiste", ponieważ są... „urojone"!
Żeby to „udowodnić", matematycy używają „reguły" **(M.4.)**, i znajdują „rozwiązania" **(M.13.)**:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-i\sqrt{-4}}{2} = -i\sqrt{-\frac{4}{4}} = -i\sqrt{-1} = (-i)(+i) = +1 \\ x_2 &= \frac{+i\sqrt{-4}}{2} = +i\sqrt{-\frac{4}{4}} = +i\sqrt{-1} = (+i)(+i) = -1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(M.20.)}$$

Nie mówi się przy tym, że dokonano translacji paraboli **(Fig. M.4).**

„Rozwiązania" **(M.20.)** są słuszne dla równania:

$$x^2 - 1 = 0$$

Ale **NIE JEST to równanie (M. 18.)!**

Jak to wyżej przedstawiliśmy, matematycy twierdzą, wskazując na K.F. Gaussa, że każde równanie stopnia **n** musi mieć **n** rozwiązań. Jeżeli nie w dziedzinie t.zw. liczb rzeczywistych, to w dziedzinie t.zw. liczb urojonych.

Otóż, za życia swego Karl Friedrich Gauss twierdził (*Disquisitiones arithmeticae,* 1801), że każde równanie stopnia **n może mieć maksymalnie n** rozwiązań, którym odpowiada **n** punktów przecięcia prostej z krzywą opisaną tym równaniem.
Ale, **może mieć** nie oznacza, że **musi mieć.**
Ale przekonanie matematyków sprowadza się do **wiary** (głębokiej!), że każde równanie drugiego stopnia **musi mieć** dwa rozwiązania.
A to oznacza, że parabola **musi** przecinać się z osią **x-ów.**
Uprzejmie „donosimy" za ś.p. K.F. Gaussem, że… **nie musi!** **Amen.**

Przestrzeń hiperurojona

Jak wyżej wskazaliśmy, właśnie L. Euler wprowadził zapis $i = \sqrt{-1}$, który to zapis stał się podstawą „wynalazku" *liczb urojonych.*

Z kolei, my pozwalamy sobie wprowadzić liczbę o hiper własnościach, zwaną dalej *liczbą hiperurojoną* **j,** postaci:

$$j = \sqrt{0}$$

Ponieważ zero **(0)** jest sumą dowolnych liczb symetrycznych (według matematyków, oczywiście), to tym samym *liczba hiperurojona* **j** ma bardziej ogólny charakter niż liczba urojona **i,** ponieważ **j** zawiera w sobie wszystkie liczby znane i nieznane, w tym także liczby dowolnie… urojone!

Wróćmy teraz do równania **(M.16.).** Według matematyków równanie to posiada „rozwiązania" **(M.13.)** w dziedzinie t.zw. „liczb urojonych". Zastępując w zależnościach **(M.13.)** „liczby urojone **i**" „liczbami hiperurojonymi **j**", znajdujemy:

$$\frac{-b \mp j\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} = x_o \qquad \text{(M.21.)}$$

i jest to rozwiązanie według zależności **(M.7.)**, a co widać na rys. **M.5.**

Wykazaliśmy więc, że niezależnie od „przestrzeni urojonej **i**" istnieje „przestrzeń hiperurojona **j**", która – podobnie jak „przestrzeń urojona **i**" – jest całkiem... rzeczywista!

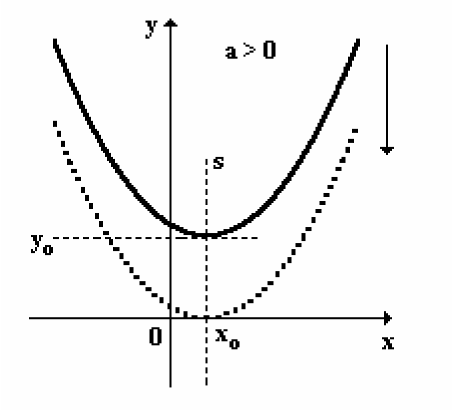

Fig. M.5. Translacja paraboli **(Eq. M.16.)** w „przestrzeni hiperurojonej".

Ponadto, w „przestrzeni hiperurojonej **j**", hiperurojona liczba **j** może być jednym z rozwiązań dla wszystkich równań postaci **(M.10.).**

Zauważmy więc, że pisanie równania **(M.6.)** w postaci równania **(M.10.)** jest niczym nieuzasadnionym wskazaniem, że tylko zmienna **y** może spełniać warunek: **y = 0.**
Otóż, zmienna **x** też może spełniać ten sam warunek.
Dlatego, nie tylko możemy, ale musimy napisać: **y = 0** oraz **x = 0.** Dla tych warunków, jednakowych dla obydwu zmiennych, w każdym równaniu stopnia drugiego (także dowolnego stopnia **n**) krzywa określona danym równaniem przecina się z początkiem układu współrzędnych.
Spełnione jest to dla warunku: **c = 0** w równaniach **(M.6.)** oraz **(M.10)**, i mamy:

$$\mathbf{ax^2 + bx = (ax + b)x = 0}$$

skąd znajdujemy dwa rozwiązania **(Fig. M.6.)**:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.22.)}$$

jak najbardziej rzeczywiste!

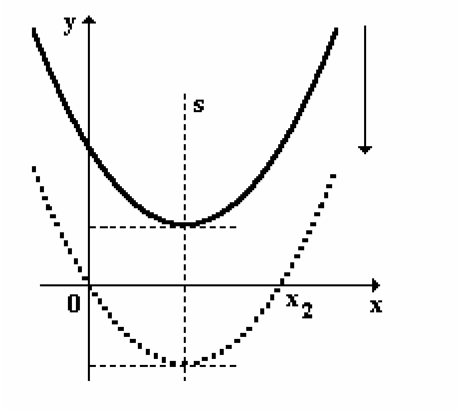

Fig. M.6. Parabola w „przestrzeni hiperurojonej **j**".

Zamiast więc męczyć dzieci w szkole skomplikowanymi i niezrozumiałymi rozwiązaniami **(M.11.)**, i z kolei robić „wynalazki" w postaci liczb urojonych i zespolonych postaci **(M.12.)**, należy podziałać liczbą hiperurojoną **j** na czynnik **c** w równaniu **(M.10.)**, i pisać**:**

$$\mathbf{ax^2 + bx + jc = 0}$$

Każda parabola opisana powyższym równaniem przecina się jednocześnie z osiami **x** oraz **y,** czyli przecina się z nimi w początku układu współrzędnych, czyli $\mathbf{x_1 = 0}$**,** jak to przedstawiono na rys. **M.6.**
Jeżeli chcemy znaleźć drugi punkt przecięcia, to łatwiutko w pamięci (!) znajdziemy rozwiązanie $\mathbf{x_2}$ według zależności **(M.22.).**