XII.1. *Fiki-miki matematyki*

Matematyka zaliczana jest do najbardziej ścisłych objawień *homo sapiens*.
Z tego też względu, swego czasu matematykę intronizowano nawet na Królową Nauk.

Należy jednak uwzględniać, że matematyka nie jest nauką przyrodniczą, lecz jest zbiorem różnego rodzaju reguł oraz formułek, nie zawsze ze sobą spójnych logicznie.
A co niżej pokażemy na przykładzie t.zw. *liczb urojonych.* I nie tylko.

XII.1.1. Liczby, liczby...

Ze względu na t.zw. ziarnisty charakter budowy materii oraz powtarzalność zjawisk fizycznych, w sposób naturalny powstaje możliwość ustalania pewnej cechy układów materialnych, a mianowicie: ilości. Tak powstaje, dosyć naturalne pojęcie liczby.

Można uprościć **zapis** ilości elementów różnych zbiorów, i zamiast pisać literowo słowo „pięć", można użyć na przykład symbolu **V**.
Grecy, i z kolei Rzymianie używali znaków zwykłego alfabetu do oznaczania liczb, np.: **I, V, X, L, M,** oraz złożenia tych symboli: **III, IV, VII, XV,** itp.
Jest więc **V** mrówek, a także **IX** włosów na głowie (prawie) łysego.

W wiekach średnich **Leonardo FIBONACCI** (znany też jako Leonardo da Piza) w swym dziele *Liber abaci* (1202 r.) wprowadził arabski zapis liczb: **1, 3, 8**, itp., a który to zapis Arabowie wcześniej „pożyczyli" z… Indii.
Zapis taki wyraźnie różni się od zapisu liter alfabetu łacińskiego, co było i jest bardzo wygodne w praktycznym użyciu.

Liczby bezwzględne

Symbole oznaczające ilości elementów dowolnych zbiorów, i **bez określania rodzaju czy szczególnych cech tych elementów,** zwane są obecnie ***liczbami bezwzględnymi***.
Liczbom bezwzględnym nie przypisuje się żadnego znaku.

Liczby dodatnie i ujemne

Można rozpatrywać zbiory, których elementy mają **własności dokładnie przeciwne sobie.** Jest to więc podział względny na dwa zbiory.

Pojęcie liczb ujemnych, a tym samym dodatnich, wprowadził włoski fizyk, matematyk i astrolog **Girolamo** (Gerolamo, Geronimo) **CARDANO** (1501-76), co nie oznacza, że je od razu zastosowano.

Liczby dodatnie, które zaznaczane są znakiem plus **(+)**, a tym samym określony jest dodatkowo rodzaj zbioru, czyli cecha szczególna elementów tego zbioru;

Liczby ujemne, które zaznaczane są znakiem minus **(–)**, a tym samym określony jest rodzaj zbioru, którego elementy mają cechę dokładnie przeciwną do cechy elementów zbioru dodatniego.

Liczby dodatnie i ujemne zwane są ogólnie ***liczbami względnymi***.

Zero

Wraz z arabskim zapisem liczb przyjęto zapis niezwykły: **0**, który zwany jest zerem.
Przyjmuje się, że symbol ten oznacza **brak** określonych elementów w jakimś zbiorze: wśród dowolnej ilości żab **nie ma** bociana (na szczęście, dla żab – oczywiście), a co żaby zapisują w postaci: **0** bocianów.
W ten sposób, zero wprowadza pojęcie przeciwne do liczby określającej liczebność danego zbioru. Jest to więc zbiór, w którym… nie ma elementów! Jest to „zbiór pusty".
Ponadto przyjmuje się, że zero **(0)** rozdziela sobą zbiory liczb dodatnich oraz ujemnych.

Tym samym, zero **nie jest** elementem zbioru liczb dodatnich, ani też zbioru liczb ujemnych.
Także **nie jest** elementem zbioru liczb bezwzględnych.
W powyższym sensie, **zero (0) nie jest liczbą.**

Liczby symetryczne

Liczby przeciwnych znaków i równych wartościach bezwzględnych, zwane są **liczbami symetrycznymi**.
W matematyce przyjmuje się, że suma dowolnych liczb symetrycznych daje w wyniku zero **(0),** na przykład:

$$(+1) + (-1) = 0$$

I jest to dosyć dziwne. Otóż, z definicji liczba określa ilość elementów.
A w wyniku sumowania elementy te znikają? Gdzie? „Sprywatyzowali”?
Z powyższego jasno wynika, że wskazana wyżej operacja sumowania odnosi się do **przeciwnych cech** danych elementów, a nie do ich **ilości**, a której miarą jest właśnie **liczba.**
Ale cechy te też nie znikają, lecz kompensują się!
I tutaj pewna analogia. Pewien czas w fizyce istniało przekonanie, że materia… znika.
Otóż w wyniku bezpośredniego połączenia negatonu i pozytonu (elementarne ładunki elektryczności przeciwnego znaku) powstaje nowa cząstka materialna obojętna elektrycznie, stąd nie do wykrycia w polach elektrycznym czy magnetycznym.
Interesująco i niezwykle trafnie na ten temat wypowiedział się W. Lenin: *„>Materia znika< – to znaczy, że znika ta granica, do której znaliśmy materię dotychczas;...*” I dalej: *„… materia jest obiektywną realnością, istnieje poza naszą świadomością”*[1].

Zbiór dowolnych liczb symetrycznych nie jest zbiorem „pustym”, lecz dokładnie wypełnionym elementami dodatnimi i ujemnymi w równych ilościach.
W odróżnieniu od zera określającego „zbiór pusty”, powinniśmy pisać:

$$(+1) + (-1) = \mathbf{S}$$

Z kolei, **S** (symmetry) można rozłożyć na dowolne liczby symetryczne, na przykład:

$$\mathbf{S} = (+7) + (-7)$$

Powyższe zapisy są sobie równoważne pod warunkiem, że **S** nie jest zbiorem pustym.
Powyższe oznacza też, że **S** oznacza zbiór, w którym nie ma nie kompensowanych liczb dowolnego znaku. Np. sama liczba **(+5)** nie jest zbiorem liczb symetrycznych.

Zauważmy, że znacznie późniejsze zasady dynamiki Isaaca Newtona (1687 r.) spełniają definicję liczb symetrycznych.
III zasada dynamiki: *„Dla każdej akcji (lub siły) istnieje równa i przeciwnie skierowana reakcja (siła).*
A to dokładnie spełnia definicję dowolnych liczb symetrycznych.
I zasada dynamiki: *„Jeżeli na ciało działają siły wzajemnie równoważące się, to ciało to pozostaje w spoczynku, lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym”.*
Siły wzajemnie równoważące się można zapisać za pomocą liczb symetrycznych, których suma jest równa **S.**
Natomiast stan spoczynku, lub ruch jednostajny prostoliniowy, to nic innego jak brak zmiany ruchu. A to odpowiada zbiorowi pustemu (brak **zmiany** ruchu), co z kolei można zapisać za pomocą symbolu zero **(0).**

Należy tu zaznaczyć, że na wielkościach fizycznych nie można wykonywać żadnych operacji matematycznych.
Z tego też względu zarzucano I. Newtonowi, że poprzez zbytnie matematyzowanie fizyki, można zatracić sens, nie tylko fizyczny.
I tak na przykład, zapis: $\mathbf{p = m\ v}$ słownie opisywany jest w wielu podręcznikach fizyki jako: pęd ciała jest równy iloczynowi masy i prędkości.

[1] W. Lenin, „Materializm a empiriokrytycyzm”, Dzieła, t. 14, Książka i Wiedza, 1949, str. 298.

Podobnie: **F = m a** ponoć oznacza, że siła jest równa iloczynowi masy i przyśpieszenia.
To siła **F** jest… iloczynem?

A także: $\rho = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{V}}$ jako: gęstość ciała jest to iloraz masy i objętości.

To gęstość ρ jest… ilorazem?

Należy pamiętać, że według wzorów fizyki wykonuje się operacje matematyczne na liczbach przypisanych danym wielkościom fizycznym.

Liczby dodatnie i ujemne można przypisać wielkościom fizycznym kierunkowym (np. siła, prędkość). Natomiast liczby bezwzględne – skalarom (np. masa).

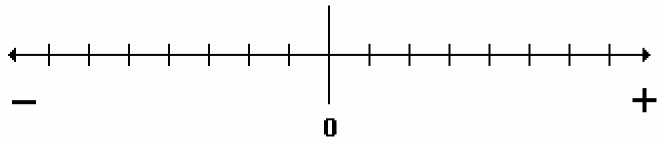

Fig. M.1. Geometryczna interpretacja liczb dodatnich i ujemnych.

Zauważmy, że liczby symetryczne, a także dowolne dodatnie i ujemne, można przedstawić geometrycznie jako odcinki przeciwnie skierowane.

Dodawanie oraz odejmowanie

Oczywiste jest sumowanie elementów tego samego zbioru:

(+3) + (+7) = (+10)

Dodawanie elementów **nie zmienia** cechy tych elementów oraz ich liczebności.
Identycznie jest w przypadku liczb ujemnych:

(–3) + (–7) = (–10)

I tutaj dosyć istotna uwaga.

Stosowane jest takie samo oznaczenie na rodzaj elementów (dodatnie lub ujemne) oraz na rodzaj operacji na tych elementach (dodawanie lub odejmowanie).
Jest to mylące, ponieważ cecha danych elementów, to jest to zupełnie co innego niż operacja dodawania lub odejmowania tych elementów.
*Istnieje więc **konieczność** wprowadzenia odrębnych zaznaczeń operacji dodawania i odejmowania, innych niż znaki liczb dodatnich i ujemnych. Albo odwrotnie.*

Na podstawie definicji liczb symetrycznych, możemy swobodnie dodawać elementy zbiorów dodatnich i ujemnych, np.:

(+3) + (–2) = (+1) + S

Powyższe oznacza, że dwa elementy dodatnie oraz dwa elementy ujemne wzajemnie skompensowały się tworząc zbiór **S**. Tym samym, zbiór **S** nie jest pusty!
Natomiast jeden element zbioru dodatniego nie został skompensowany, stąd wynik: **(+1)**.
Jest to element poza zbiorem „pustym” **S**.
Nie jest możliwe dodawanie elementów określonego znaku do zbioru liczb symetrycznych:

S + (1) = (1) + S = (1)

Oznacza to, że poza zbiorem liczb symetrycznych jest jeden element ujemny, lub dodatni.
Tym samym, zbiór ten nie zmienił się.
W przypadku odejmowania, mamy:

S – (+1) = (–1)

co oznacza, że po „wyjęciu” ze zbioru liczb symetrycznych jednego elementu dodatniego, przeważa jeden element ujemny, a który nie jest już kompensowany przez odpowiedni

element dodatni, który właśnie wyjęliśmy! Tym samym, element ujemny jest już poza zbiorem liczb symetrycznych!
A to z kolei oznacza, że ze zbioru **S** wyjęliśmy **dwa** elementy przeciwnego znaku!
Podobnie:

$$\mathbf{S - (-1) = (+1)}$$

W powyższych przykładach nie ma zmiany znaku liczby, lecz występuje liczba o przeciwnym znaku ze zbioru **S**. Warto, a nawet należy to pamiętać!
Zauważmy, że dla zera **(0)** jako zbioru pustego, powyższe operacje odejmowania nie są możliwe do wykonania:

$$\mathbf{0 - (+1) = ?}$$

Jednak, według reguł matematycznych, powinniśmy otrzymać:

$$\mathbf{0 - (+1) = -1}$$

A także: $$\mathbf{0 - (-1) = +1}$$

Ale w jaki sposób z pustego kapelusza (nie mylić z „pustą głową”!) można wyjąć (tłustego) królika?
Z powyższych przykładów wprost widać, że **0** to nie jest to samo co **S.**
Piszemy także: **(+5) – (+7) = (– 2)**. Pełny zapis ma postać:

$$\mathbf{(+5) - (+7) = S + (+5) - (+7) = (+7) + (-7) + (+5) - (+7) =}$$
$$\mathbf{= 0 + (-7) + (+5) = (-5) + (-2) + (+5) = 0 + (-2) = (-2)}$$

W powyższym zapisie, tylko **pozornie** została zmieniona cecha (dodatnia) elementów.
Liczba ujemna **(–2)** pochodzi ze zbioru **S**.
A to z tego prostego i oczywistego powodu, że **niemożliwe** jest pobranie z danego zbioru więcej elementów niż ten zbiór zawiera danych elementów. Dlatego musieliśmy sięgnąć do zbioru **S** po dwa elementy danego znaku, czyli sięgnęliśmy do innego zbioru (zbiór **S**), niż zbiór pięciu dodatnich elementów **(+5).** Ze zbioru symetrycznego **S**:

$$\mathbf{S = (+2) + (-2)}$$

wzięliśmy **(+2)**, a pozostałością rozbitego zbioru **S** jest **(–2)**.
Z powyższych rozważań wprost wynika, że:

1° operacje sumowania oraz odejmowania liczb nie zmieniają znaku tych liczb.
2° nie jest możliwe dodawanie liczb niesymetrycznych (dodatnich lub ujemnych) do zbioru liczb symetrycznych.
3° można odejmować liczby dodatnie i ujemne ze zbioru liczb niesymetrycznych. Tego rodzaju operacja jest równoważna podziałowi wybranego zbioru liczb symetrycznych na dwie liczby niesymetryczne.
4° nie jest możliwe dodawanie lub odejmowanie liczb dowolnego znaku ze zbioru pustego zwanego zerem (0).
5° z definicji, zbiór pusty 0 nie zawiera w sobie elementów. Możliwa jest też definicja 0 jako niepodzielnego zbioru liczb symetrycznych.

Matematyczna definicja zera **(0)** jako zbioru pustego i jednocześnie zbioru (podzielnego) liczb symetrycznych jest wewnętrznie sprzeczna.

Należy więc wyraźnie rozróżniać „zbiór pusty” **0** od zbioru liczb symetrycznych **S.**
Ponadto, czytający powyższe, a także dalszy tekst, powinien mieć pełną świadomość tego, że powyższe to ja przedstawiam.
Natomiast matematycy są dokładnie przeciwnego zdania.
Mają prawo, ponieważ jest „pluralizm i demokracja”.

Mnożenie oraz dzielenie

Mnożenie[2] jest szczególnym przypadkiem sumowania liczb równych sobie i tego samego znaku:

(+2) + (+2) + (+2) = (+2) x 3 = (+6)

A także:

(–2) + (–2) + (–2) = (–2) x 3 = (–6)

W powyższych zapisach liczba **3** określa ilość sumowanych liczb danej wartości i znaku.
Jest to więc *liczba bezwzględna*, której cechą jest właśnie brak cechy liczb dodatnich lub ujemnych!
Oznacza to, że operacja mnożenia jest operacją zwielokrotniania zbioru elementów danej cechy (dodatniej lub ujemnej).

Można zaznaczyć jakiego znaku liczby są zwielokrotniane. W takim przypadku, liczba bezwzględna zastąpiona jest przez liczbę odpowiedniego znaku:

(+2) + (+2) + (+2) = (+2) x (+3) = (+6)

A także:

(–2) + (–2) + (–2) = (–2) x (–3) = (–6)

Zauważmy, że w obydwu powyższych przypadkach, **operacja mnożenia, podobnie jak operacja dodawania, nie zmienia cechy (dodatniej lub ujemnej) elementów danego zbioru.**
Krotność operacji mnożenia może być wskazywana przez ***liczbę bezwzględną***, lub liczbę znaku liczby zwielokrotnianej. Wyniki są takie same.
Powyższe oznacza, że mnożenie przez siebie liczb tego samego znaku daje w wyniku liczbę tego samego znaku.
Powyższe wprost oznacza, że **mnożenie liczb tego samego znaku nie zmienia znaku wyniku mnożenia.**
Ale matematycy stosują metodę „równych i równiejszych", i przedstawiają:

(+2) x (+3) = (+6) oraz **(–2) x (–3) = (+6)**

Poważnie? Za ile?
Z powyższego wprost też wynika, że

nie istnieje mnożenie przez siebie liczb przeciwnego znaku.

Jest to dosyć oczywiste. Otóż, w świetle powyższych rozważań, następujący zapis:

(+2) x (–3) = (–6)

oznacza, że trzykrotnie zwielokrotniliśmy liczbę **(+2)** i otrzymaliśmy w wyniku liczbę ujemną! Nieprawda. Sumowanie żab nie daje w wyniku bociana. Proste?

Dzielenie jest operacją przeciwną do operacji mnożenia: dany zbiór liczb dodatnich lub ujemnych dzielimy na równe sobie podzbiory.
Powyższe oznacza, że równe sobie podzbiory zachowują cechę zbioru głównego: są liczbami dodatnimi lub ujemnymi:

(+6) : 3 = (+2)

A także:

(–6) : 3 = (–2)

Podobnie jak wyżej, gdzie liczba bezwzględna **3** była krotnością operacji mnożenia, tak i w tym przypadku liczba bezwzględna **3** jest krotnością operacji dzielenia. Liczba ta nie określa ilości elementów danego zbioru.

[2] znak mnożenia **x** , a także znak dzielenia w postaci dwu kropek lub jednej kropki, wprowadził William Ougthred w 1631 r. w swej *Clavis Mathematicae*, a znak ten użyty został w arytmetyce dopiero w drugiej połowie XIX w.

Istnieje dzielenie przez siebie liczb tego samego znaku:

$$(+6) : (+2) = 3$$

oraz:

$$(-6) : (-2) = 3$$

Powyższe jest równoważne pytaniu: ile razy (liczba bezwzględna!) w danym zbiorze liczb (dodatnich lub ujemnych) mieści się zbiór liczb tego samego znaku?
Odpowiedź jest w postaci liczby bezwzględnej, ponieważ operacji podziału danego zbioru na podzbiory nie przypisuje się cechy dodatniej lub ujemnej. Natomiast operacja dzielenia zaznaczana jest symbolicznie za pomocą dwukropka, lub „kreski ułamkowej”.
Powyższe możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{(+a)}{(+b)} = \frac{(-a)}{(-b)} = \frac{|a|}{|b|} = \frac{a}{b} = c$$

Podobnie jak w przypadku mnożenia można przyjąć, że w przypadku dzielenia liczb tego samego znaku otrzymuje się w wyniku liczbę znaku niezmienionego.
Wskazuje to też dodatkowo jakiego znaku liczby były dzielone.

$$\left.\begin{aligned} \frac{(+a)}{(+b)} &= +\left[\frac{a}{b}\right] = (+c) \\ \frac{(-a)}{(-b)} &= -\left[\frac{a}{b}\right] = (-c) \end{aligned}\right\}$$

Dochodzimy więc do wniosku, że:

nie istnieje dzielenie przez siebie liczb przeciwnego znaku.

A to z tego prostego względu, że pozbawione jest sensu pytanie: ile razy dana liczba ujemna mieści się w danym zbiorze liczb dodatnich? Łatwo (nie)zauważyć, że w zbiorze liczb dodatnich **nie ma** liczb ujemnych, i odwrotnie!
Tym samym, operacja dzielenia jest też proporcją dwu liczb tego samego znaku.

Potęgowanie i pierwiastkowanie

Potęgowanie jest powtarzaniem operacji mnożenia kolejnych mnożnych wtórnych, przy czym mnożnik ma **taką samą wartość** co mnożna pierwotna.

W 1637 r. René Descartes użył zapisu $\mathbf{a^2}$ zamiast **aa.** Podobnie: $\mathbf{a^3}$ zamiast **aaa.** Zapisy te odnosiły się do liczb, którym nie przypisywano ani znaku plus, ani też znaku minus. Obecnie liczby takie zwane są *liczbami bezwzględnymi*. Mamy na przykład:

$$4 \text{ x } [4 \text{ x } (4)] = (4 \text{ x } 4) \text{ x } (4)$$

Ponieważ: **(+4) = (+1) x 4**, oraz **(–4) = (–1) x 4,** to analogicznie do powyższego, mamy dla liczb dodatnich:

$$4 \text{ x } [4 \text{ x } (+4)] = (4 \text{ x } 4 \text{ x}4) \text{ x } (+1) = (+4)^3$$

czyli: $4^3 \text{ x } (+1) = 64 \text{ x } (+1) = (+64)$

Podobnie dla liczb ujemnych:

$$4 \text{ x } [4 \text{ x } (-4)] = (4 \text{ x } 4 \text{ x } 4) \text{ x } (-1) = (-4)^3$$

czyli: $4^3 \text{ x } (-1) = 64 \text{ x } (-1) = (-64)$

Z powyższych zapisów wprost wynika, że t.zw. wykładnik potęgi jest liczbą bezwzględną.
Tym samym

potęgowanie nie zmienia znaku mnożnej pierwotnej.

Z kolei, pierwiastkowanie[3] jest operacją przeciwną do operacji potęgowania: jest częściowym lub całkowitym cofnięciem operacji potęgowania.

Według zapisu Rudolffa, mamy: $\sqrt{\mathbf{a}^2} = \mathbf{a}$, oraz $\sqrt[3]{\mathbf{a}^3} = \mathbf{a}$.

Wobec tego, my też mamy:

$$\sqrt[3]{(+4)^3} = (+4)$$

z czym matematycy zgadzają się. Mają prawo…

Podobnie:

$$\sqrt[3]{(-4)^3} = (-4)$$

z czym matematycy nie zgadzają się. Mają prawo…

Jednak prawda jest taka, że

pierwiastkowanie nie zmienia znaku liczby pierwiastkowanej.

Isaac Newton, a także John Wallis (matematyk angielski, 1616-1703) próbowali uogólnić zapisy Rudolffa oraz R. Descartesa na liczby dodatnie i ujemne.

Jak z powyższego widać, ze skutkiem raczej mizernym.

Liczby urojone i zespolone

W matematyce przyjmuje się następujące „reguły” mnożenia przez siebie liczb różnych znaków (**a, b** oraz **c** są liczbami bezwzględnymi):

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (+\mathbf{a})\times(+\mathbf{b}) \\ (-\mathbf{a})\times(-\mathbf{b}) \end{array}\right\} = +(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \\ \left.\begin{array}{l} (+\mathbf{a})\times(-\mathbf{b}) \\ (-\mathbf{a})\times(+\mathbf{b}) \end{array}\right\} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(M.1.)}$$

– iloczyn liczb dodatnich daje[4] w wyniku liczbę dodatnią;

– iloczyn liczb ujemnych daje w wyniku liczbę… dodatnią;

– iloczyn liczb dodatniej i ujemnej daje w wyniku liczbę… ujemną.

W przypadku pierwiastkowania, matematycy przedstawiają, że:

a) nie istnieją pierwiastki z liczb ujemnych, gdy n jest liczbą naturalną parzystą.

b) istnieją pierwiastki z liczb ujemnych, gdy n jest liczbą naturalną nieparzystą:

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt[2]{-5} = ? & \mathbf{n} = 2 \\ \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5} & \mathbf{n} = 3 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(M.2.)}$$

Ponadto, matematycy przyjmują, że pierwiastek kwadratowy (**n = 2**) z liczby dodatniej daje w wyniku… albo liczbę dodatnią albo liczbę ujemną; a to z tego względu, że iloczyn liczb dodatnich, a także iloczyn liczb ujemnych daje w wyniku liczbę dodatnią **(Eqs M.1.)**.

Z tego właśnie względu, nie wiadomo czy dodatnia liczba pod pierwiastkiem jest wynikiem mnożenia liczb dodatnich czy ujemnych.

Powyższa „niewiedza” wynika z definicji **(M.1.).**

Symbol $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, zwany obecnie „liczbą urojoną”, wprowadził w 1777 r. szwajcarski fizyk i matematyk, twórca wyższej matematyki, Leonhard Euler (1707-1783).

Chodziło tu o inne przedstawienie pierwiastka z liczby ujemnej. Na przykład:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = \mathbf{i}\sqrt{3} \qquad \textbf{(M.3.)}$$

---

[3] Symbol $\sqrt{\ }$ wprowadził Rudolff w 1526 r. Zapis taki zaczęto stosować dopiero ponad sto lat później.

[4] znak równości w postaci dwu równoległych kresek wprowadził w 1557 r. Robert Record.

Powyższe oznacza, że liczba **3** pod pierwiastkiem jest liczbą bezwzględną.
A ponadto, powyższa operacja pierwiastkowania stosowana jest **oddzielnie dla liczby oraz oddzielnie dla znaku przed tą liczbą!**

Obecnie, matematycy wprowadzili liczby urojone o następujących własnościach:

$$\left.\begin{aligned}(+\mathbf{i})\cdot(+\mathbf{i}) &= +\mathbf{i}^2 = +\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1\\ (-\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{i}) &= +\mathbf{i}^2 = +\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1\\ (+\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{i}) &= -\mathbf{i}^2 = -\left(\sqrt{-1}\right)^2 = +1\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.4.)}$$

Według „reguły” **(M.4.)**, jest też:

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2 \qquad \textbf{(M.4a)}$$

A więc istnieją pierwiastki z liczb… ujemnych!? Poważnie? A jednak!
Ale można też otrzymać inne wyniki:

$$\left.\begin{aligned}(+\mathbf{i})\cdot(+\mathbf{i}) &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = +\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{+1} = \pm 1\\ (-\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{i}) &= \left(-\sqrt{-1}\right)\cdot\left(-\sqrt{-1}\right) = +\left(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\right) = \pm 1\\ (+\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{i}) &= -\left(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\right) = -(\pm 1) = -1\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(M.5.)}$$

co **nie jest zgodne** z zapisem **(M.4.)**. Ale jest zgodne z zapisem **(M.1.) !**
Natomiast, według„reguły” **(M.5.)**, znajdujemy:

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{(-2)\cdot(-2)} = \sqrt{+4} = \pm 2 \qquad \textbf{(M.5a)}$$

i jest to wynik częściowo (nie)zgodny z poprzednim.

Zauważmy, że zapisy **(M.4)** oraz **(M.5)** nie będą wzajemnie sprzeczne**,** jeżeli przyjmiemy naturalną regułę, że <u>działania na liczbach nie zmieniają znaku tych liczb:</u>

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{(-2)\cdot(-2)} = \sqrt{-4} = \left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$$

Ale reguła ta została zastosowana przez matematyków dla liczby $\mathbf{i}^2 = (-1)$ w zapisie **(M.4.) !**
A dlaczego nie jest już słuszna dla liczby $\mathbf{j}^2 = (-2)$? A jest jakaś inna „reguła” dla $\mathbf{k}^2 = (-3)$?

Jak to dalej wykażemy (**„Plusy prostopadłe do minusów”**), powyższa niejednoznaczność wynika z przyjętej reguły **(M.1.)**, że <u>działania na liczbach</u> mają wpływ na <u>zmianę znaku tych liczb</u>.

Reguła ta jest też sprzeczna z definicją liczby $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ podaną przez L. Eulera.
Liczby postaci: $\mathbf{a} = (\alpha + \beta\,\mathbf{i})$ zwane są *liczbami zespolonymi*.
Liczba α zwana jest częścią rzeczywistą i oznaczana jako: α = *re***a**, od słowa łacińskiego *realis*; natomiast liczba oznaczana jako: β = *im***a** (od słowa *imaginarius*) zwana jest częścią urojoną liczby zespolonej **a.**
Z tego względu, t.zw. „liczby zespolone” postaci: $\mathbf{a} = (\alpha + \beta\,\mathbf{i})$ są szczególnym złożeniem liczb rzeczywitych i urojonych.

<u>Reasumując:</u> liczbę urojoną według definicji **(M.4.)** wprowadzono rażąco niezgodnie z definicją **(M.1.).**
Która z tych definicji jest poprawna?
<u>Zupełnie niepoważna (bezsensowna) jest definicja **(M.2.).**</u>