## X.6. System eliptyczny Johannesa Keplera.

W sierpniu 1609 r. Johannes Kepler (1571-1630) wydał książkę *Nowa Astronomia*, w której podane są wyniki obliczeń dla orbity Marsa, na podstawie wcześniej wykonanych pomiarów przez Tycho Brahe (1546-1601).
W pracy tej Johannes Kepler podał też pierwsze dwa prawa zwane jego imieniem.
Omówimy te prawa w kolejności, w jakiej je J. Kepler wcześniej (1604-5) prezentował w korespondencji prywatnej.

### II prawo J. Keplera

Według II prawa J.Keplera ***promień wodzący poprowadzony od Słońca do danej planety zakreśla równe pola w równych czasach, i.e. „prędkość polowa" jest stała.***

Powyższe odnosi się do ruchu jednostajnego po koncentrycznym okręgu, lub ruchu niejednostajnego po ekscentrycznym okręgu.

Dla danej planety o masie **m** jej moment pędu **h** jest taki, że:

$$\mathbf{h} = \mathbf{p} \cdot \lambda = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} \cdot \lambda = \textit{constant} \qquad \textbf{(X.6.1.)}$$

Ponieważ: $\mathbf{v} = \omega \lambda$, gdzie $\omega$ jest prędkością kątową promienia wodzącego $\lambda$, to:

$$\mathbf{h} = \mathbf{m} \cdot \omega \cdot \lambda^2 = \textit{constant}$$

Ponadto: $\phi = \omega \tau$, gdzie $\phi$ jest kątem jaki w czasie $\tau$ zakreśla promień wodzący $\lambda$.
Wobec tego:

$$\mathbf{h} = \mathbf{m} \cdot \frac{\phi}{\tau} \cdot \lambda^2 = \textit{constant} \qquad \textbf{(X.6.2.)}$$

Jeżeli więc „ *równe pola w równych czasach*", to: $\tau$ = ***constant***, oraz:

$$\phi \cdot \lambda^2 = \textit{constant}$$

Wartość liczbowa promienia wodzącego $\lambda$ zmienia się od wartości minimalnej do maksymalnej. Można więc rozważać wartość średnią **r** promienia $\lambda$.
Z kolei, dla okręgu o promieniu **r** spełniona jest zależność:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \phi \cdot \mathbf{r}^2 \qquad \textbf{(X.6.3.)}$$

gdzie **S** jest powierzchnią (częścią pola okręgu) jaką zakreśla promień **r.**

Dla pełnego obrotu planety, jest: $\phi = 2\pi$, oraz: $\mathbf{S} = \pi \mathbf{r}^2$.

Do czasów Johannesa Keplera przyjmowano, że (pomijając ruch wspólnego środka orbit) orbity planet są ekscentrycznymi okręgami, jak to przedstawiono na rys. **X.6.1.**
Zauważmy, że:
*„Jeżeli przez punkt leżący wewnątrz okręgu poprowadzone są cięciwy, to iloczyn odcinków każdej cięciwy jest stały i równa się kwadratowi połowy cięciwy prostopadłej do średnicy przechodzącej przez dany punkt".*
Wobec tego, mamy:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^2 = \mathbf{R}^2 - \mathbf{d}^2 = \mathbf{R}^2 (1 - \mathbf{e}^2)$$

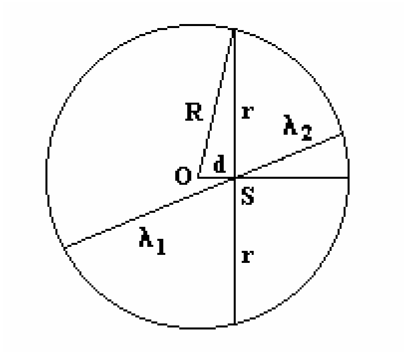


**Fig. X.6.1** Ekscentryczność okręgu o promieniu **R**.

gdzie:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{R}}$$

zwane jest mimośrodem okręgu o promieniu **R**.

Z kolei, promień **r** jest promieniem okręgu **(Fig. X.6.2.)**. Promień **r** jest średnią geometryczną promieni wodzących $\lambda_1$ oraz $\lambda_2$ **(Fig. X.6.1.)**.

Obrót promienia **r** o kąt $\phi$ jest dokładnie równy obrotowi promieni wodzących $\lambda_1$ oraz $\lambda_2$.

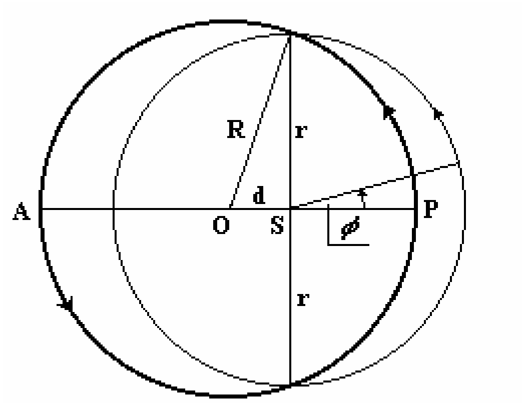


**Fig. X.6.2.** Ekscentryczne orbity planet według II prawa J. Keplera.

Tak więc, w równych czasach $\tau$ promienie $\lambda_1$ oraz $\lambda_2$ zakreślają równe (ale nierówne sobie) pola.
Podobnie, w równych czasach $\tau$ promień **r** **(Eq. X.6.3.)** zakreśla równe pola:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\phi \cdot \mathbf{r}^2 = \frac{1}{2}\phi \cdot \mathbf{R}^2\left(1 - \mathbf{e}^2\right)$$

Ponadto, warunek stałości momentu pędu **(Eqs X.6.1.** oraz **X.6.2.)** dla okręgu o promieniu **r**, przyjmuje postać:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \omega \cdot \mathbf{r}^2 = \frac{\phi}{\tau}\mathbf{r}^2 = \textit{constant}$$

gdzie $\tau$ jest czasem, w którym promień **r** zakreśla kąt $\phi$.

Dla pełnego obiegu po orbicie, mamy: $\phi = 2\pi$ oraz $\tau = \mathbf{T}$; i mamy:

$$2\pi\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{T}} = 2\pi\frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{T}}\left(1-\mathbf{e}^2\right) = constant$$

czyli:

$$\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{T}} = constant \qquad \textbf{(X.6.4.)}$$

co możemy przedstawić słownie: ***kwadraty średnich odległości* r *planet od Słońca są proporcjonalne do okresów* T *obiegu tych planet.***
Jest to więc treść II prawa J. Keplera, ale wyrażona innymi słowami: „prędkość polowa jest stała”. Tak więc, II prawo J. Keplera odnosi się do ekscentrycznych orbit kołowych.

Ale jest to przedstawiony wyżej system heliocentryczny Mikołaja Kopernika z Torunia!

## I prawo J. Keplera.

Orbita Marsa nie jest kołowa, a co także wynikało wprost z pomiarów pozostawionych przez Tycho Brahe. A tym samym znane było jego uczniowi J. Keplerowi.

Zauważmy też, że wyżej przedstawione równania dla orbit kołowych są także słuszne dla elipsy, jeżeli przyjmiemy, że promień **r** okręgu jest średnią geometryczną wielkiej półosi **a** oraz małej półosi **b** elipsy **(Fig. X.6.3.):**

$$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}$$

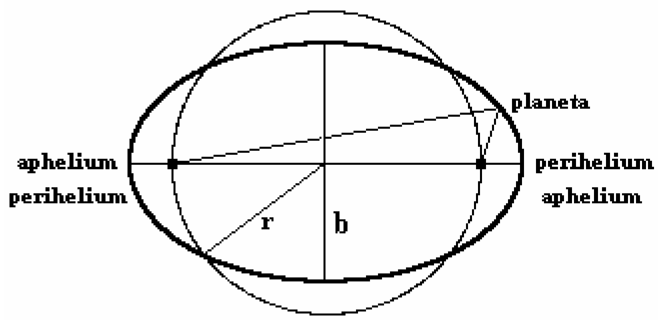


**Fig. X.6.3.** Eliptyczne orbity planet według I prawa J. Keplera.

Pole elipsy jest równe:

$$\mathbf{S} = \pi\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \pi\cdot\mathbf{r}^2$$

i jest równe polu okręgu o promieniu **r.**

Wobec tego, Johannes Kepler napisał „poprawkę” w postaci:

***Orbity planet są elipsami, a w jednym z ognisk znajduje się Słońce***,

I jest to treść I prawa.

Uwaga: na rys. **X.6.3.** przyjęliśmy szczególny warunek:

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \mathbf{D} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618...$$

*i.e.* iloraz małej oraz wielkiej półosi elipsy jest równy *divina proportio* **D.**

Dla tego warunku, ogniska elipsy wyznaczone są przez przecięcia okręgu z wielką osią elipsy. Oczywiście, powyższego warunku J. Kepler nie pisał.

Reasumując powyższe, II prawo J. Keplera odnosi się w równym stopniu do **ekscentrycznych** orbit kołowych, jak i orbit **eliptycznych.**
W tej sytuacji, I prawo jest połową II prawa!…

Zauważmy też, że orbita eliptyczna wymaga dwu jednakowych Słońc w dwu ogniskach elipsy. Na powyższe zwrócili też uwagę współcześni Keplerowi, a który prawie dziewięć lat pracował, aby napisać (maj 1628 r.) właściwą teorię ruchu planetarnego.
Efekt tej pracy znany jest obecnie jako:

## III prawo J. Keplera.

***Kwadraty okresów* T *obiegu planet są proporcjonalne do sześcianów ich średnich odległości* r *od Słońca.***

Powyższe można zapisać w postaci:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{T}^2}{\mathbf{r}^3} = \textit{constant} \qquad \textbf{(X.6.5.)}$$

co jest **dokładnie <u>niezgodne</u>** z zapisem **(X.6.4.),** czyli jest niezgodne z II oraz I prawem tegoż samego autora.

Ale J. Kepler zauważył też, że stała **k** w powyższej zależności nie ma charakteru uniwersalnego. Wartość tej stałej jest inna w przypadku ruchu planet wokół Słońca, a inna w przypadku ruchu satelitów Jowisza. Także ma inną wartość w przypadku ruchu Księżyca wokół Ziemi.
Ponadto, w III prawie Johannes Kepler nie tylko, że nie wskazuje kształtu orbit, lecz także nie wskazuje, że *„w równych czasach… równe pola…”*.

Jak z powyższego wprost wynika, drugie prawo (w tym także pierwsze) oraz trzecie prawo J. Keplera są **wzajemnie sprzeczne.** Trudno tego nie zauważyć.
Ale jeszcze trudniej zrozumieć dlaczego powtarzane są „teorie”, z których sam ich autor…

zrezygnował!

III prawo J. Keplera (**Eq. X.6.5.**) można otrzymać z równania momentu energii **N**

**(Eqs II.5.6.** oraz **II.5.8.**).