IX.3. Podwójny efekt Dopplera.

Często jest tak, ze jednocześnie obserwator oraz źródło poruszają się w danym układzie absolutnym.

Poruszające się źródło **VS** generuje w **W-space** ruch falowy o częstotliwości ν_s i długości fali λ_s **(V-transformacja IX.2.1.).**
Należy mieć na uwadze, że w transformacji **(IX.2.1.)** δ_s jest kierunkiem propagacji fali w **W-space**, ale względem osi ruchu $\mathbf{v_S}$ źródła **VS.**

Z kolei, punktowy obserwator **PO** (**P-transformacja**, **IX.1.1.**) może poruszać się po innej osi ruchu $\mathbf{v_O}$. Względem osi ruchu $\mathbf{v_O}$ fale dochodzą pod kątami γ_i. Ale obserwator **PO** widzi je z kierunków δ_i **(Eqs IX.1.1.)**. Tak więc, δ_S oraz δ_i są to zupełnie różne kąty liczone względem różnie położonych względem siebie osi ruchu $\mathbf{v_S}$ oraz $\mathbf{v_O}$.

Uwzględniając powyższe, obserwowana przez punktowego obserwatora **PO** częstotliwość $\mathbf{f_D}$ oraz długość λ_D fali są takie, że **(Eqs IX.1.1.** oraz **IX.2.1.)**:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f_D} &= \nu_S \cdot \mathbf{K}_\delta^i = \nu \frac{\mathbf{K}_\delta^i}{\mathbf{K_S}} = \nu \frac{\beta_O \cos\delta_i + \sqrt{1-\beta_O^2 \sin^2\delta_i}}{-\beta_S \cos\delta_S + \sqrt{1-\beta_S^2 \sin^2\delta_S}} \\ \lambda_S &= \lambda \cdot \mathbf{K_S} = \textit{invariant} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(IX.3.1.)}$$

Powyższe zależności, zwane dalej w skrócie **D**–transformacją, są ogólnym opisem podwójnego efektu Dopplera.

Zauważmy, że obserwator **PO** na ogół nie zna kierunków δ_S oraz prędkości względnych β_S źródła drgań **VS** ruchu falowego.
Z transformacji **(IX.3.1.)** wynika, że:

$$\lambda_S \cdot \mathbf{f_D} = \lambda \cdot \nu \cdot \mathbf{K}_\delta^i = \mathbf{u} \neq \mathbf{c} \qquad \textbf{(IX.3.2.)}$$

Obserwator może pomierzyć obserwowaną częstotliwość $\mathbf{f_D}$ oraz też pomierzyć (jeżeli potrafi) długość fali $\lambda_S = \textit{invariant}$ generowanej przez źródło drgań w danym ośrodku.
Z zależności **(IX.3.2.)** wynika, że obserwowana (wyliczona) prędkość **u** ruchu falowego jest inna, niż rzeczywista prędkość **c** tego ruchu falowego, np. światła w tzw. próżni.
W szczególnych przypadkach, gdy obserwowany rozkład spektralny można skojarzyć z widmem znanych pierwiastków, np. wodoru, możliwe jest określenie wartości $\nu = \nu_H$ występującej w transformacji **(IX.3.1.).** Pozwala to wyliczyć wartość λ z zależności $\mathbf{c} = \lambda \cdot \nu$, wartość $\mathbf{K}_\delta^i$ z zależności **(IX.3.2.),** i z kolei wartość kąta obserwacji δ_i .

Szczególne przypadki podwójnego efektu Dopplera.

Rozpatrzymy przypadek podwójnego efektu Dopplera, gdy punktowy obserwator **PO** oraz punktowe źródło drgań **VS** poruszają się z różnymi prędkościami wzdłuż tego samego toru ruchu. Należy tu rozpatrzyć cztery przypadki:

a) jeżeli obserwator **PO** wyprzedza źródło **VS**, to spełnione są warunki: $\delta_i = \pi$ oraz $\mathbf{K}_\delta^i = (1-\beta_O)$. Natomiast dla źródła jest: $\delta_S = 0$ oraz $\mathbf{K_S} = (1-\beta_S)$.
Wobec tego, z zależności **(IX.3.1.)**, mamy:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f_D} &= \nu\ \frac{\mathbf{1}-\beta_\mathbf{O}}{\mathbf{1}-\beta_\mathbf{S}} \\ \lambda_\mathbf{S} &= \lambda\ \left(\mathbf{1}-\beta_\mathbf{S}\right) \end{aligned}\right\}$$

Z powyższego mamy **(Eq. IX.3.2.)**:

$$\lambda_\mathbf{S}\cdot\mathbf{f_D} = \lambda\cdot\nu\left(\mathbf{1}-\beta_\mathbf{P}\right) = \mathbf{c}\left(\mathbf{1}-\beta_\mathbf{O}\right) = \mathbf{u} < \mathbf{c}$$

Tak więc, obserwowana prędkość fali **u** jest mniejsza od jej rzeczywistej prędkości **c**.

Dla prędkości krytycznej źródła **VS**, i.e. dla $\beta_\mathbf{S} = \mathbf{1}$ jest, że $\mathbf{f_D} = \infty$ oraz $\lambda_\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

Powyższe oznacza, że przed źródłem nie jest generowany ruch falowy $\left(\lambda_\mathbf{S} = \mathbf{0}\right)$.

Natomiast dla prędkości nadkrytycznej źródła, i.e. dla $\beta_\mathbf{S} > \mathbf{1}$ jest, że $\mathbf{f_D} < \mathbf{0}$ oraz $\lambda_\mathbf{S} < \mathbf{0}$.

Tak więc, dla prędkości krytycznych i nadkrytycznych źródła wystąpi tzw. efekt „czarnej dziury". Efekt ten wystąpi także, gdy obserwator **PO** porusza się z prędkością krytyczną lub nadkrytyczną $\beta_\mathbf{O} \geq \mathbf{1}$.

Jeżeli źródło i obserwator poruszają się z jednakowymi prędkościami $\left(\beta_\mathbf{O} = \beta_\mathbf{S}\right)$, to:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f_D} &= \nu \\ \lambda_\mathbf{S} &< \lambda \end{aligned}\right\} \qquad \text{oraz} \qquad \lambda_\mathbf{S}\cdot\mathbf{f_D} = \mathbf{u} < \mathbf{c}$$

Obserwator odbiera fale o częstotliwości własnej ν źródła. Jednak obserwowana długość fali jest mniejsza: $\lambda_\mathbf{S} < \lambda$.

Zauważmy, że powyższy warunek spełniony jest w przypadku słynnego eksperymentu Michelsona-Morleya, oraz innych.

b) niech teraz źródło **VS** wyprzedza obserwatora **PO**.

W takim przypadku, dla obserwatora spełnione są warunki: $\delta_\mathbf{i} = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{K}_\delta^\mathbf{i} = \left(\mathbf{1}+\beta_\mathbf{O}\right)$.

Natomiast dla źródła jest: $\delta_\mathbf{S} = \pi$ oraz $\mathbf{K_S} = (\mathbf{1} + \beta_\mathbf{S})$, i z zależności **(IX.3.1.),** mamy:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f_D} &= \nu\ \frac{\mathbf{1}+\beta_\mathbf{O}}{\mathbf{1}+\beta_\mathbf{S}} \\ \lambda_\mathbf{S} &= \lambda\ \left(\mathbf{1}+\beta_\mathbf{S}\right) \end{aligned}\right\}$$

W tym przypadku efekt „czarnej dziury" nie występuje, tak w przypadku prędkości nadkrytycznej źródła, jak i obserwatora. Podobnie jak poprzednio, dla $\beta_\mathbf{O} = \beta_\mathbf{S}$, mamy:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{f_D} &= \nu \\ \lambda_\mathbf{S} &> \lambda \end{aligned}\right\} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{u} > \mathbf{c}$$

Powyższy warunek także spełniony jest w przypadku eksperymentu Michelsona-Morleya .

c) jeżeli punktowy obserwator **PO** oraz źródło **VS** poruszają się naprzeciwko siebie, to spełnione są warunki: $\delta_\mathbf{i} = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{K}_\delta^\mathbf{i} = (\mathbf{1}+\beta_\mathbf{O})$ dla obserwatora **PO.**

A także: $\delta_\mathbf{S} = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{K_S} = (\mathbf{1}-\beta_\mathbf{S})$ dla źródła **VS**. Z transformacji **(IX.3.1.)** mamy:

$$\left.\begin{aligned} f_D &= \nu\ \frac{1+\beta_O}{1-\beta_S} \\ \lambda_S &= \lambda\ (1-\beta_S) \end{aligned}\right\}$$

Oczywiście, efekt „czarnej dziury" wystąpi dla prędkości krytycznej i nadkrytycznej źródła. Mamy też:

$$u = \lambda_S \cdot f_D = \lambda \cdot \nu(1+\beta_O) > c$$

d) jeżeli obserwator **PO** oraz źródło **VS** oddalają się od siebie, to $\delta_i = \pi$ oraz $K_\delta^i = (1-\beta_O)$, a także: $\delta_S = \pi$ oraz $K_S = (1+\beta_S)$. Mamy więc:

$$\left.\begin{aligned} f_D &= \nu\ \frac{1-\beta_O}{1+\beta_S} \\ \lambda_S &= \lambda\ (1+\beta_S) \end{aligned}\right\}$$

W tym przypadku efekt „czarnej dziury" wystąpi tylko dla prędkości krytycznej i nadkrytycznej obserwatora. Występuje „podłużenie" długości fali.
Mamy też:

$$u = \lambda_S \cdot f_D = \lambda \cdot \nu(1-\beta_O) < c$$

Zauważmy, że dla warunku: $\beta_O = \beta_S$, częstotliwość $f_D = \nu = \mathit{invariant}$, ale tylko w przypadku, gdy źródło i obserwator poruszają się w tym samym kierunku.

We wszystkich powyższych szczególnych przypadkach, spełniony jest warunek:

$$\lambda_S \cdot f_D = u \neq c$$

gdzie **u** jest prędkością światła widzianą przez poruszającego się obserwatora **(Eqs IX.1.1.)**.

Jeżeli potrafimy pomierzyć λ_S oraz f_D, to możemy dojść do „rewelacyjnego odkrycia", że… „światło zmienia bieg"!

Układ laboratoryjny.

Obecnie rozpatrzmy przypadek, gdy pomiary wykonywane są w laboratorium. Tym samym, źródło drgań **VS** oraz obserwator **PO** znajdują się w niewielkiej odległości od siebie. W takim układzie pomiarowym, praktycznie efekt Jamesa Bradleya nie jest obserwowany (praktycznie nie jest mierzalny). Tak więc, praktycznie kierunek drgań względem źródła jest γ_S, a nie δ_S. Podobnie, względem obserwatora kierunek obserwacji jest γ_i, a nie δ_i.
Oznacza to, że praktycznie kierunki δ_S oraz δ_i pokrywają się odpowiednio z kierunkami γ_S oraz γ_i.
Z powyższych względów, zależności **(IX.3.1.)** można przepisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned} f_D &= \nu_S \cdot K_\gamma^i = \nu\,\frac{K_\gamma^i}{K_S} = \nu\,\frac{\sqrt{1+2\beta_O\cos\gamma_i+\beta_O^2}}{\sqrt{1-2\beta_S\cos\gamma_S+\beta_S^2}} \\ \lambda_S &= \lambda\cdot K_S = \lambda\sqrt{1-2\beta_S\cos\gamma_S+\beta_S^2} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(IX.3.3.)}$$

Ponadto, łatwo zauważyć, że dla dowolnego ustawienia układu pomiarowego zródła **VS** oraz obserwatora **PO**, spełniony jest warunek: $\gamma_S + \gamma_i = \pi$.

A także, w układzie laboratoryjnym, spełniony jest warunek: $\beta_O = \beta_S$.

Dla tych warunków, z pierwszego z równań **(IX.3.3.)** znajdujemy, że: $\mathbf{f_D} = \nu$.

Tak więc, w warunkach laboratoryjnych, jesteśmy w stanie pomierzyć (z bardzo wysoką dokładnością) częstotliwość własną ν źródła drgań **VS**.

Z kolei, znając wartość prędkości **c** światła *in vacuo*, możemy obliczyć wartość długości fali λ światła użytego w eksperymencie, ze wzoru: $\mathbf{c} = \lambda \cdot \nu$.

Maksymalne zmiany długości fali według drugiego równania zależności **(IX.3.3.)** są takie, że:

$$\lambda_1 = \lambda(1 - \beta_S) \quad \text{dla} \quad \gamma_S = 0\, deg$$

oraz

$$\lambda_2 = \lambda(1 + \beta_S) \quad \text{dla} \quad \gamma_S = 180\, deg$$

Z powyższego, mamy: $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda$, co umożliwia wyznaczenie wartości długości fali λ .

Mamy także: $\Delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1) = 2\lambda\beta_S$. Przyjmując, że $\beta_S \approx 0.0167$ **(Eq. X.7.8.)**, to maksymalne zmiany długości fali wynoszą: $\Delta\lambda \approx 0.0167 \cdot 2\lambda$.

Zauważmy, że A.A. Michelson w swych eksperymentach wykrycia ruchu absolutnego Ziemi – zakładał, że przy pomocy skonstruowanego przez siebie interferometru jest w stanie zarejestrować zmianę kilku setnych długości fali użytego światła monochromatycznego.

Jednak ze wskazanych wyżej obliczeń wprost wynika, że interferometr powinien umożliwiać rejestrację zmian, o co najmniej trzy setne długości fali.

Tym samym, dokładność interferometru raczej była niższa od koniecznej do rejestracji zmiany długości fali w tego rodzaju eksperymencie. Mogło to być jedną z przyczyn negatywnych wyników pomiarów.