

IX. Efekt Dopplera

Christian Johann Doppler¹ w swej pracy *Über das farbige Licht der Doppelsterne* (1842) opisał zjawisko zmiany częstotliwości oraz długości fali jako efekt ruchu źródła drgań oraz obserwatora.

Powyższe zwane jest obecnie efektem Dopplera.

IX.1. Układ punktowy obserwatora.

Będziemy wyraźnie rozróżniać punktowy układ obserwatora (**PO-system**) oraz przestrzenny układ obserwatora (**SO-system**), ponieważ to samo zjawisko fizyczne inaczej jest rejestrowane w **PO-system**, a inaczej w **SO-system**.

Załóżmy, że do nieruchomego ($\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$) obserwatora punktowego **PO** z kierunków γ_i dochodzą fale o prędkościach \mathbf{c} w układzie absolutnym i o częstotliwości ν .

Obserwator widzi je z kierunków $\delta_i = \gamma_i$. Wyznacza to długość fali λ taką, że: $\mathbf{c} = \lambda \cdot \nu$.

Jednak względem obserwatora **PO** poruszającego się ze względną prędkością \mathbf{v} , prędkość fali \mathbf{c} oraz jej częstotliwość ν zmieniają się w ten sposób, że „widziana” długość fali jest niezmiennicza:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathbf{c}}{\nu} = \frac{\mathbf{u}}{f_O} = \mathit{invariant} \\ \mathbf{K}^i &= \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{c}} = \frac{f_O}{\nu} \end{aligned} \right\} \text{ a stąd}$$

gdzie: \mathbf{u} – prędkość względnie absolutna fali w układzie obserwatora **PO**;

f_O – obserwowana częstotliwość fali w układzie obserwatora **PO**;

\mathbf{K}^i – transformacja prędkości według zależności (VIII.1.5).

Fale biegnące do obserwatora z kierunków γ_i , mają względem poruszającego się obserwatora prędkość \mathbf{u} , a obserwator „widzi” je z kierunków δ_i (Fig. IX.1.1.). Mamy więc:

$$\left. \begin{aligned} f_O &= \nu \cdot \mathbf{K}_\delta^i = \nu \cdot \left[\beta_O \cos \delta_i + \sqrt{1 - \beta_O^2 \sin^2 \delta_i} \right] \\ f_O &= \nu \cdot \mathbf{K}_\gamma^i = \nu \cdot \sqrt{1 + 2\beta_O \cos \gamma_i + \beta_O^2} \\ \lambda &= \mathit{invariant} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.1.1.})$$

gdzie spełniony jest warunek (VIII.1.5a) dla transformacji (VIII.1.5).

Powyższe, zwane dalej w skrócie **P-transformacją**, w sposób ogólny opisuje znany efekt Dopplera dla poruszającego się obserwatora punktowego.

Na rys. IX.1.1. przedstawiono rozkład kątowy widzianych częstotliwości f_O w układzie obserwatora punktowego **PO**.

¹ (1803-53), matematyk i fizyk austriacki, profesor Politechniki (1848-51) i Uniwersytetu (od 1851) w Wiedniu.

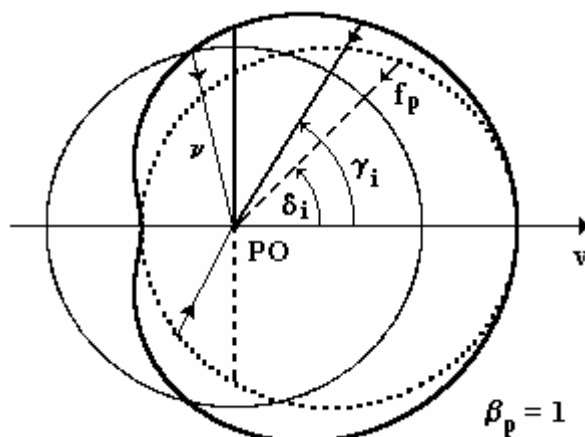


Fig. IX.1.1. Rozkład kątowy obserwowanych częstotliwości f_O w układzie obserwatora punktowego, według **P-transformacji (IX.1.1).**

Gdyby obserwator **PO** był nieruchomy w **A-space**, to ze wszystkich kierunków dochodziłyby do niego fale o jednakowych częstotliwościach v .

Poruszający się obserwator **PO** może je obserwować z kierunków δ_i (**Fig. IX.1.1.**, ekscentryczny okrąg – linia przerywana) jako fale o częstotliwościach f_O (**Eq. IX.1.1.**).

Jeżeli z kolei, obserwowane częstotliwości f_O odłożymy w kierunkach γ_i , to zostanie wyznaczona konchoida okręgu (linia ciągła pogrubiona).

Równania Dopplera

Dla częstotliwości obserwowanych wzdłuż osi ruchu v układu obserwatora, mamy:

a) przed obserwatorem, i.e. dla $\delta_i = 0$, z transformacji (**IX.1.1.**) znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= v (1 + \beta_O) \\ \lambda &= \text{invariant} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.1.2.})$$

b) za obserwatorem, i.e. dla $\delta_i = \pi$, mamy:

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= v (1 - \beta_O) \\ \lambda &= \text{invariant} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.1.3.})$$

T.zw. „efekt poprzeczny” możemy obliczyć z **P-transformacji (IX.1.1.)** dla $\delta_i = \pi/2$ względem osi ruchu v .

Natomiast kierunek obserwowanej częstotliwości niezmienniczej $v = \text{invariant}$ możemy obliczyć też z transformacji (**IX.1.1.**), ale dla warunku: $f_O = v$.

Prędkość krytyczna.

Jeżeli obserwator **PO** porusza się z prędkością krytyczną: $\beta_O = 1$, to może obserwować fale tylko przed sobą (**Fig. IX.1.2.**)

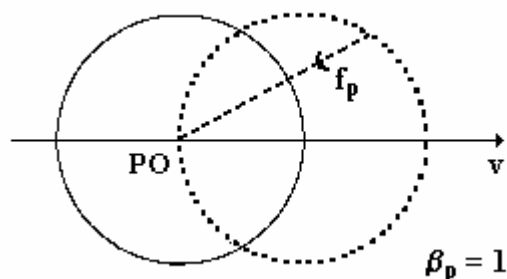


Fig. IX.1.2. Obserwator **PO** porusza się z prędkością krytyczną $\beta_O = 1$. Ekstremalny „kąt widzenia” δ_i możemy obliczyć z transformacji (IX.1.1.) i z warunku:

$$1 - \beta_O^2 \sin^2 \delta_i \geq 0$$

A z powyższego:
$$\sin \delta_i \leq \pm \frac{1}{\beta_O} \quad (\text{IX.1.4})$$

Dla $\beta_O = 1$ jest, że $\delta_i = 90^\circ$ oraz $\delta_i = 270^\circ$.

I jest to punkt poruszający się razem z obserwatorem **PO**.

Tak więc, obserwator może oglądać sygnały przed sobą dla kątów $90^\circ > \delta_i > 270^\circ$.

Z kolei, z **S-transformacji** (VIII.1.3.), znajdujemy: $\sin \phi_i = 1 \cdot 1 = 1$, czyli $\phi_i = 90^\circ$.

Tak więc, obraz zawarty w kącie $\gamma_i = (\delta_i + \phi_i)$ obserwator widzi w kącie δ_i przed sobą (**Eq. VIII.1.5b** oraz **Fig. IX.1.1.**).

Prędkości nadkrytyczne

Załóżmy, że obserwator **PO** porusza się z prędkością nadkrytyczną $\beta_O = 1.5$.

Z zależności (IX.1.4.) znajdujemy maksymalny „kąt widzenia” (licząc od osi ruchu **v**):

$$\sin \delta_i = \frac{1}{1.5} \quad \text{oraz} \quad \delta_i = 41^\circ 48' 37''$$

Z kolei, z **S-transformacji** (VIII.1.3.), znajdujemy: $\sin \phi_i = 1.5 \frac{1}{1.5} = 1$.

Tak więc, kąt aberracji $\phi_i = 90^\circ$.

Im większa prędkość nadkrytyczna, tym mniejszy kąt wierzchołkowy „stożka widzenia”.

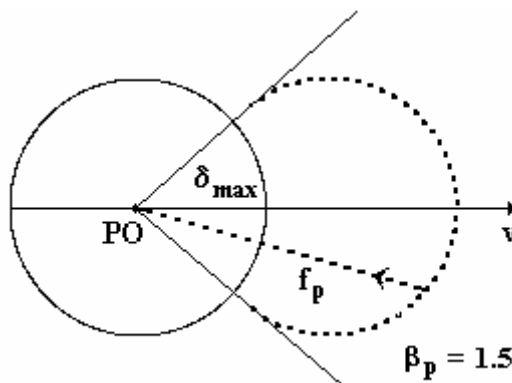


Fig. IX.1.3. „Kąt widzenia” dla prędkości nadkrytycznych.

Z zależności (VIII.1.5a) wynika, że $\gamma_i > \delta_i$, co oznacza, że ze względu na ruch obserwatora obserwowany obraz ulega ściśnięciu względem osi ruchu **v** obserwatora.

Tym samym, obraz zawarty w kącie $\gamma_i = (\delta_i + \phi_i)$ obserwator widzi w kącie δ_i przed sobą. Jest tak dla prędkości $v < c$.

Jednak dla $v \geq c$, czyli dla prędkości krytycznych i nadkrytycznych jest, że kąt aberracji $\phi_i = 90^\circ = \text{constant}$. Dla tych prędkości obserwator nie może już odbierać sygnałów ze wszystkich kierunków.

Ponadto należy zauważyć, że ze względu na prędkość nadkrytyczną, obserwator dogania i wyprzedza sygnały biegnące w układzie absolutnym **A-space** **od** obserwatora.

Z tego względu, oddalające się **od** obserwatora sygnały widziane są jako sygnały zbliżające się do obserwatora z kierunków przed obserwatorem.

Z powyższego wynika też, że tak sygnały dochodzące do obserwatora, jak i sygnały oddalające się od obserwatora poruszającego się z prędkością krytyczną lub prędkościami nadkrytycznymi, widziane są **przed** obserwatorem w stożku o maksymalnym kącie rozwarcia według zależności (IX.1.4.).

Oznacza to, że obserwator poruszający się z prędkością nadkrytyczną „widzi” **przed sobą dwa obrazy** nakładające się na siebie w tym samym „kącie widzenia”.

Jeden obraz tworzony jest przez fale biegnące **do** obserwatora.

Są to fale o największych częstotliwościach (przesunięcie w kierunku fioletu).

Obraz ten można by nazwać „przyszłością” do której zmierza obserwator. Oczywiście, taką „przyszłość” obserwator mógłby też zobaczyć nie ruszając się z miejsca (obserwator nieruchomy). Ale byłaby to „przyszłość” w innym kolorze (brak zmiany częstotliwości).

Drugi obraz tworzony jest przez fale, które w układzie absolutnym **A-space** biegną w kierunkach **od** obserwatora, i fale te obserwator dogania i wyprzedza, a to ze względu na własną prędkość nadkrytyczną. Są to fale o mniejszych częstotliwościach (przesunięcie barw w kierunku czerwieni).

Jest to więc obraz dosłownie z... przeszłości, i to tym bardziej odległej, im większą prędkość nadkrytyczną ma obserwator.

Tak więc, obserwator może zobaczyć siebie jak startował do tego lotu!