

II.6. Wahadło proste.

Przez wahadło proste rozumiemy ruch oscylacyjny punktu materialnego o masie m po dolnym łuku okręgu o promieniu R , w stałym polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = \text{constant}$.

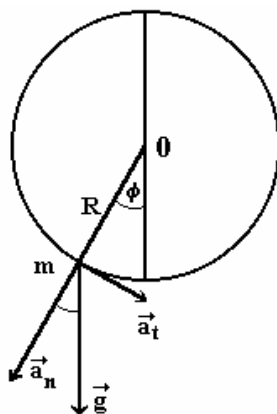


Fig. II.6.1. Rozkład wektora $\bar{\mathbf{g}}$ przyspieszenia ziemskiego na składowe $\bar{\mathbf{a}}_n$ oraz $\bar{\mathbf{a}}_t$. Składowe te nie wyznaczają charakterystycznego punktu na okręgu, względem którego oscyluje cząstka o masie m .

Praktyczną realizacją powyższego jest wprawiony w ruch ciężarek o masie m zawieszony na nici o długości R .

Zauważmy od razu, iż praktyczna realizacja różni się od definicji wahadła prostego już chociażby z tego względu, że według definicji amplituda wahań spełnia warunek: $\phi < \pi$, podczas gdy praktyczna realizacja ogranicza ruch oscylacyjny do wartości amplitudy $\phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ponadto, wprowadzenie nici wprost sugeruje rozkład wektora \mathbf{g} na dwie składowe: normalną \mathbf{a}_n wzdłuż nici, oraz styczną \mathbf{a}_t do okręgu.

I tak się to czyni, jak to pokazano na rys. II.6.1.

Zauważmy więc, że składowa \mathbf{a}_n nie ma żadnego wpływu na ruch cząstki, lecz określa kształt toru ruchu. Z kolei, kierunek składowej stycznej \mathbf{a}_t jest taki, że cząstka kierowana jest poza tor ruchu!

Z powyższego wprost wynika, że będą poważne trudności przy opisie ruchu oscylacyjnego cząstki po łuku okręgu, w oparciu o składowe \mathbf{a}_n oraz \mathbf{a}_t .

I rzeczywiście. Trzeba było stworzyć aż specjalny rachunek formalny, zwany ogólnie funkcjami eliptycznymi, aby po wielce złożonych i specjalnych założeniach oraz wątpliwej zasadności podstawieniach znaleźć wzór na okres T wahadła prostego w postaci:

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} K(k)$$

gdzie:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

jest pełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju, gdzie z kolei przyjmowany jest warunek:

$$\sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\Phi}{2} \sin u = k \sin u$$

Wartości funkcji $K(k)$ można obliczyć posługując się rozwinięciem $K(k)$ w szereg potęgowy (wzór Newtona) względem $k \ll 1$, i.e. zakłada się, że k jest dużo mniejsze od jedności, czyli zakładając niewielką amplitudę wahań, nie przekraczającą kilkunastu stopni kątowych.

Rozwijając funkcję $K(k)$ w szereg potęgowy względem $\sin(\phi/2)$, znajdujemy (patrz np.: Szczepan Szczeniowski – FIZYKA DOŚWIADCZALNA, Część I, str. 225, PWN, Warszawa 1972):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\phi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\phi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \sin^8 \frac{\phi}{2} + \dots \right] \quad (\text{II.6.1.})$$

Jak widać, powyższe rozwiązanie jest tak „proste”, że nazwę „wahadło proste” zmieniono na nazwę „wahadło matematyczne”.

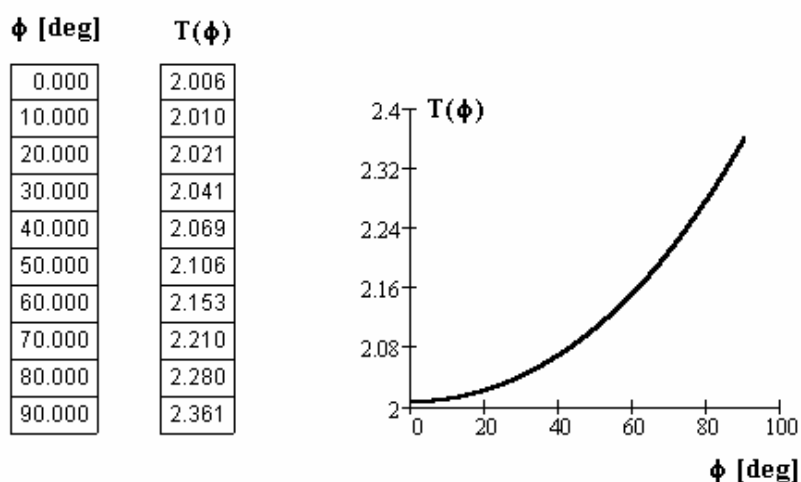


Fig. II.6.2. Okresy $T(\phi)$ wahadła matematycznego według Eq. (II.6.1.)

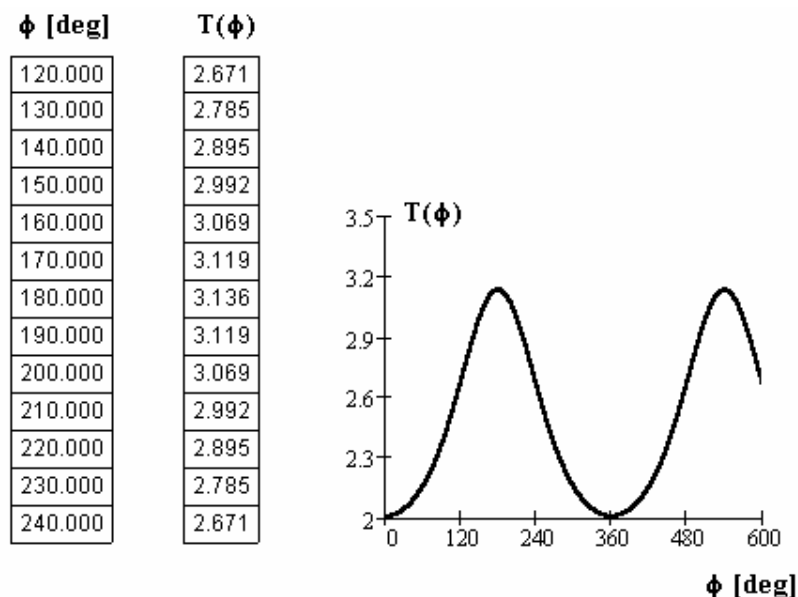


Fig. II.6.3. Okresy $T(\phi)$ wahadła matematycznego według Eq. (II.6.1.).

Jednak nawet pobieżna analiza powyższego równania wprost wskazuje, że powyższy wzór nie dotyczy ruchu oscylacyjnego wahadła, lecz opisuje ruch niejednostajny po okręgu, który także jest ruchem okresowym.

Jak wprost widać z rys. II.6.3., okresy $T(\phi)$ według równania (II.6.1.) są funkcją dowolnie dużych kątów ϕ . A to oznacza, że wychylenie wahadła z położenia równowagi ($\phi = 0$ deg) może być dowolnie duże. Z tych względów, „okresowość okresowości” (Fig. II.6.3.) równania (II.6.1.).

Z powyższych względów, rozwiązanie (II.6.1.) jest błędne.

Równoważność ruchu jednostajnego po okręgu oraz ruchu oscylacyjnego.

Rozważajmy ruch jednostajny cząstki materialnej o masie m po okręgu o promieniu R . W ruchu takim działa stała siła D bezwładności, zwana w tym przypadku siłą odśrodkową.

Założmy, że prędkość kątowa ω promienia R jest taka, że wartość siły bezwładności D jest dokładnie równa sile grawitacji F .

Ponadto zakładamy, że na cząstkę m nie działają żadne siły zewnętrzne, np. siła ciężkości.

Jeżeli tak, to przyspieszenie odśrodkowe jest dokładnie równe przyspieszeniu ziemskiemu g .

Zależność (II.1.7.) możemy więc przepisać w postaci zależności (II.5.1.) oraz (II.5.2.):

$$D = m \cdot g = m \frac{v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R = \text{constant} \quad (\text{II.6.2.})$$

gdzie: v – stała prędkość liniowa cząstki m po obwodzie okręgu o promieniu R ;

ω – stała prędkość kątowa promienia R .

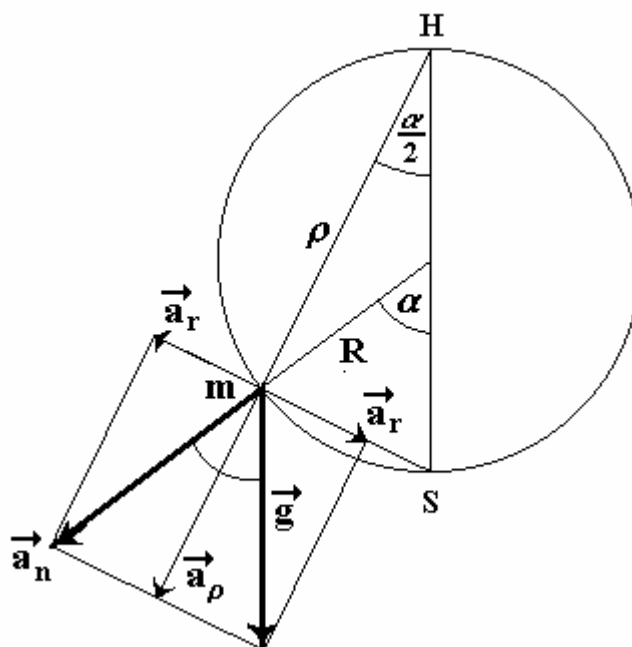


Fig. II.6.4. Rozkład wektora \vec{g} przyspieszenia odśrodkowego w ruchu jednostajnym po okręgu oraz przyspieszenia ziemskiego w ruchu oscylacyjnym na składowe \vec{a}_ρ oraz \vec{a}_r .

Obecnie rozpatrzmy przypadek, gdy cząstka m swobodnie zsuwa się po łuku okręgu w stałym polu grawitacyjnym (Fig. II.6.4.).

Na cząstkę m działa stała siła ciężkości $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ o stałym pionowym kierunku w dół.

Z rys. (II.6.4.) wprost widać, że tak w przypadku ruchu jednostajnego po okręgu (Eq. II.6.2.), jak i w przypadku swobodnego spadku po łuku okręgu, wektor siły odśrodkowej $\vec{D} = \vec{F}$ może być rozłożony na dwie składowe:

$$\left. \begin{aligned} D_{\rho} &= m \cdot a_{\rho} = m \cdot \omega_{\rho}^2 \cdot R = m \cdot g \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ D_r &= m \cdot a_r = m \cdot \omega_r^2 \cdot R = m \cdot g \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\}$$

gdzie: a_{ρ} oraz a_r składowe przyspieszenia ziemskiego g wzdłuż promienia wodzącego ρ oraz promienia R .

Spełniony jest też warunek: $\vec{g} = \vec{a}_{\rho} + \vec{a}_r = \text{constant}$.

Z powyższych zależności, mamy:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\rho}^2 &= \frac{g}{R} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \omega_r^2 &= \frac{g}{R} \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6.3.})$$

Wielkość ω , zwana częstotliwością kątową lub prędkością kątową, określa częstotliwość pełnych obiegów punktu m po okręgu. Czas jednego obiegu zwany jest okresem T . Podobna okresowość występuje w ruchu oscylacyjnym. Czas powrotu do określonego położenia też zwany jest okresem T .

Z rys. II.6.4. wprost widać, że składowe \vec{a}_{ρ} oraz \vec{a}_r przyspieszenia \vec{g} są dokładnie takie same, tak w ruchu jednostajnym po okręgu jak i w ruchu oscylacyjnym po łuku tegoż okręgu.

Z kolei, dla powyższych dwóch ruchów: jednostajnego po okręgu oraz oscylacyjnego po łuku okręgu, wynika równość składowych częstotliwości ω_{ρ} oraz ω_r .

Stąd z kolei wynika równość okresów T . Przyjmując, że:

$$\omega_{\rho} = \frac{2\pi}{T_{\rho}}$$

to z zależności (II.6.3.), znajdujemy:

$$\left[\frac{2\pi}{T_{\rho}} \right]^2 = \frac{g}{R} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (\text{II.6.4.})$$

oraz

$$\left[\frac{2\pi}{T_r} \right]^2 = \frac{g}{R} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{II.6.5.})$$

Powyższe rozwiązania na okresy T_{ρ} oraz T_r wahadła prostego są sobie dokładnie równoważne, lecz przesunięte w fazie o $\pi/2$.

Na rys. (II.6.5.) oraz (II.6.6.) przedstawiono wykresy dla amplitud według równania (II.6.4.) dla układu współrzędnych biegunowych o początku w H .

α [deg] $T(\alpha)$

0	2.006
10	2.01
20	2.021
30	2.041
40	2.069
50	2.107
60	2.156
70	2.216
80	2.292
90	2.386

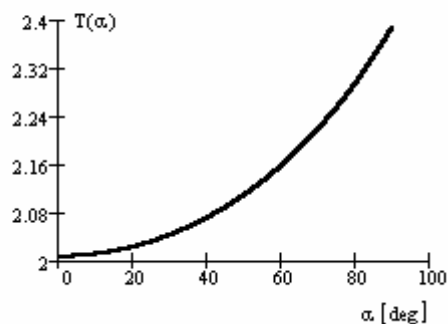


Fig. II.6.5. Okresy T_ρ według Eq. (II.6.4).

α [deg] $T(\alpha)$

80	2.292
90	2.386
100	2.502
110	2.649
120	2.837
130	3.086
140	3.43
150	3.943
160	4.814
170	6.795
180	∞
190	6.795i
200	4.814i

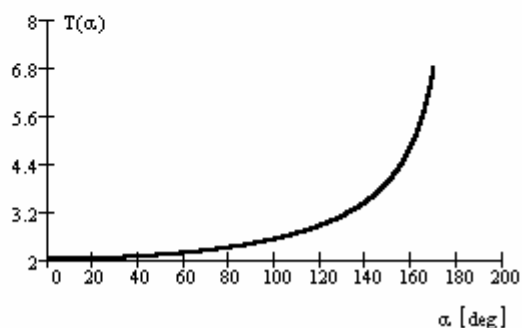


Fig. II.6.6. Okresy T_ρ według Eq. (II.6.4).

Zależności (II.6.4.) oraz (II.6.5.) można przedstawić w uproszczonej i praktycznej postaci:

$$\left. \begin{aligned} T_\rho &= 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \cos \frac{\alpha}{2}}} \\ T_r &= 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \sin \frac{\alpha}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6.6.})$$

Dla $\alpha = 0$ [deg] cząstka znajduje w dolnym położeniu S (Fig. II.6.4.),

Dla powyższego warunku z pierwszego równania zależności (II.6.6.), znajdujemy:

$$T_\rho = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \text{constant}$$

co wyznacza okres t.zw. *drgań własnych* układu.

Wyznacza też okres T w ruchu jednostajnym po okręgu o promieniu R , gdy przyspieszenie odśrodkowe a_n jest równe g (porównaj z zależnością II.1.6.).

Natomiast z drugiego równania zależności (II.6.6.) znajdujemy, że $T_r = \infty$.

Oznacza to, że cząstka znajduje się w położeniu równowagi trwałej. Jest to stan, w którym nie występuje okresowość ruchu, czyli jest to brak ruchu.

Dla $\alpha = 180$ [deg] cząstka znajduje się w górnym położeniu H , i jest to stan równowagi chwiejnej.

W dwu ostatnich wierszach tabeli na rys. II.6.6. jest $i = \sqrt{-1}$. Pod pierwiastkiem występują wartości ujemne.

A to oznacza, że dla $\alpha \geq 180$ [deg] okres ruchu oscylacyjnego wahadła nie istnieje.

Warto zwrócić uwagę, że wartości okresów T według równań (II.6.1.) oraz (II.6.6.) są wzajemnie zgodne (z podaną dokładnością) dla wartości kątów mniejszych od 40 deg (porównaj tabele na rys. II.6.2. oraz II.6.5.).