I.1. Paradoksy Zenona z Elei.

Arystoteles ze Stagiry w swej *FIZYCE* mówi o paradoksach Zenona z Elei (filozof grecki, ok.490–430 p.n.e.):

„Istnieją cztery argumenty Zenona dotyczące ruchu a będące źródłem udręki dla tych, którzy je pragną rozgryźć".

Omówimy tu dwa najbardziej znane paradoksy (argumenty) Zenona z Elei.

Czy Achilles dogoni żółwia?

Niech Achilles ściga się z żółwiem. Załóżmy, że Achilles biegnie 10 razy szybciej niż żółw, i niech początkowa odległość między nimi wynosi $\boldsymbol{l}$ = 10 kroków, dając w ten sposób *for* dla z założenia przegranego żółwia.

Jednak można wykazać, że Achilles nie tylko, że nie prześcignie żółwia, lecz nawet go nie dogoni! Rzeczywiście. Jeżeli Achilles przebiegnie 10 kroków dzielące go od żółwia, to w tym samym czasie żółw przebędzie odległość 1 kroku. Jeżeli z kolei Achilles przebędzie ten jeden krok, to w tym samym czasie żółw przebędzie 1/10 kroku..., itd. itd...
Tak więc, Achilles będzie zbliżał się do żółwia *nieskończenie blisko*, ale nigdy go nie dogoni!

Zauważmy więc, że biegnący Achilles porusza się z dwiema prędkościami: z prędkością **c** względem bieżni, oraz z prędkością $\mathbf{w_1}$ względem żółwia. Podobnie, żółw porusza się z prędkością **v** względem bieżni, oraz z prędkością $\mathbf{w_1}$ względem Achillesa.
W powyższym sensie, prędkość $\mathbf{w_1}$ ma charakter *prędkości wzajemnej*.
Natomiast prędkości **c** oraz **v** są prędkościami względnymi (względem bieżni).
Możemy więc napisać:

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \qquad \textbf{(I.1.1.)}$$

W tym przypadku, prędkość wzajemna $\mathbf{w_1}$ jest taka, że $\mathbf{w_1} = (\mathbf{c} - \mathbf{v})$. Mamy więc:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{w_1}}{\mathbf{c}} = (\mathbf{1} - \beta) \qquad \textbf{(I.1.2.)}$$

Jeżeli żółw **Ż** jest nieruchomy względem bieżni, to Achilles **A** biegnąc z prędkością **c** przebywa odległość $\boldsymbol{l}$ = **AŻ** do żółwia w czasie **t** takim, że **(Fig. I.1.)**:

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} \qquad \textbf{(I.1.3.)}$$

Natomiast względem biegnącego żółwia Achilles przebywa odległość $\boldsymbol{l}$ z inną prędkością $\mathbf{w_1}$ względem żółwia, oraz w innym czasie $\mathbf{t_1}$.

Mamy więc:

$$l = w_1 \cdot t_1 = (c - v)t_1 \qquad \textbf{(I.1.4.)}$$

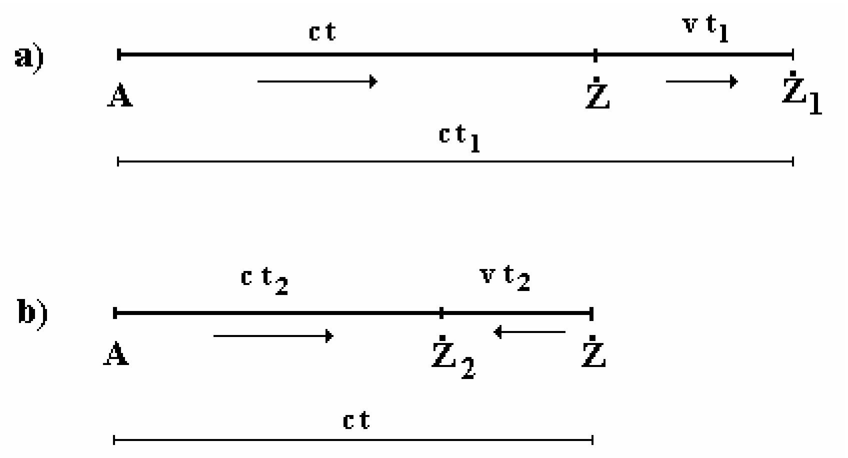

Fig. I.1. **a)** jeżeli żółw **Ż** „ucieka" przed Achillesem **A**, to Achilles dogoni żółwia w miejscu $\dot{Z}_1$;
b) jeżeli Achilles i żółw biegną naprzeciwko siebie, to spotkają się w miejscu $\dot{Z}_2$.

Natomiast względem bieżni, czyli w układzie względnym, Achilles porusza się z prędkością **c**, i po czasie t_1 dogoni żółwia, przebywając odległość l_1 taką, że:

$$l_1 = c \cdot t_1 \qquad \textbf{(I.1.5.)}$$

Ale w tym samym czasie t_1 , w tym samym układzie względnym (na bieżni), żółw przebył odległość **s**:

$$s = l_1 - l = (c - w_1)t_1 = v \cdot t_1 \qquad \textbf{(I.1.6.)}$$

Z powyższego wynika, że czas t_1 ma charakter *niezmienniczy*, ponieważ w tym samym czasie t_1 Achilles przebywa odległość l_1 w układzie względnym (na bieżni) oraz odległość l w układzie poruszającego się obserwatora (względem żółwia).
Dzieląc obydwie strony zależności **(I.1.6.)** przez zależność **(I.1.5.)**, oraz uwzględniając zależności **(I.1.1.)** oraz **(I.1.2.)**, znajdujemy:

$$\frac{s}{l_1} = \left(1 - \frac{l}{l_1}\right) = \left(1 - \frac{w_1}{c}\right) = \frac{v}{c} = \beta \qquad \textbf{(I.1.7.)}$$

oraz

$$K = \frac{w_1}{c} = \frac{l}{l_1} = (1 - \beta) \qquad \textbf{(I.1.8.)}$$

Z powyższego znajdujemy:

$$l_1 = c \cdot t_1 = \frac{ct}{1 - \beta} = \frac{l}{1 - \beta} \qquad \textbf{(I.1.9.)}$$

Znaleźliśmy więc prostą zależność między odległościami l_1 oraz l .

Z kolei dzieląc obydwie strony powyższej zależności przez **c** = ***constant***, znajdujemy:

$$\mathbf{t_1 = \frac{t}{1-\beta}} \qquad \textbf{(I.1.10.)}$$

W tym samym czasie $\mathbf{t_1}$ = ***invariant*** żółw przebył odległość **s** taką, że:

$$\mathbf{s = v \cdot t_1 = \mathit{l}_1 - \mathit{l} = \mathit{l}\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{vt}{1-\beta}}$$

Oczywiście, możemy rozpatrywać przypadek, gdy Achilles i żółw biegną naprzeciwko siebie **(Fig. 1.1b.)**. Rozumując jak powyżej, znajdujemy:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\mathit{l}_2} &= \mathbf{\frac{\mathit{l}}{1+\beta}} \\ \mathbf{t_2} &= \mathbf{\frac{t}{1+\beta}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(I.1.11.)}$$

Tak więc, spotkanie nastąpi po czasie $\mathbf{t_2}$, a Achilles przebędzie odległość $\mathbf{\mathit{l}_2}$.

W powyższym prędkość wzajemna $\mathbf{w_2}$ jest taka, że: $\mathbf{w_2 = (c+v)}$.

Rozwiązania od **(I.1.9.)** do **(I.1.11.)** zwane są tutaj transformacjami Zenona z Elei.

Jednak wbrew pozorom, przedstawione wyżej rozwiązania nie są pełnym rozwiązaniem paradoksu Zenona z Elei!
Na czym więc polega paradoks? Lub inaczej: jaki problem chciał wskazać Zenon z Elei?
Otóż, w paradoksie tym zawarte są dwie różne sytuacje fizyczne. Różność tych sytuacji polega na sposobie doganiania żółwia.
Pierwszy sposób, zawarty w pierwszej części paradoksu, polega – zgodnie z doświadczeniem – na doganianiu żółwia, czyli spotkaniu się Achillesa z żółwiem w konkretnym miejscu i czasie: Achilles i żółw biegną jednocześnie do tego miejsca. Oznacza to, że Achilles biegnie nie do żółwia, lecz do miejsca spotkania z żółwiem!
Jest to sytuacja fizyczna, w której jednostka odległości $\mathbf{\mathit{l}}$ ustalona jest w układzie poruszającego się obserwatora, a nie w układzie względnym (względem bieżni).

Natomiast druga część wywodu Zenona z Elei polega na zasugerowaniu innego sposobu doganiania żółwia: Achilles najpierw przebywa początkową odległość $\mathbf{\mathit{l}}$**,** następnie odległość $\mathbf{\mathit{l}/10}$ **,** następnie $\mathbf{\mathit{l}/100}$ **,** itd., itd.
Jest to sytuacja fizyczna zupełnie różna od poprzedniej – a mianowicie, Achilles biegnie do kolejnych miejsc, które żółw opuścił, a nie do żółwia!
Lub inaczej: Achilles *kolejno* przebywa w układzie względnym różne jednostki odległości o podziale $\boldsymbol{\beta}$, w różnych czasach także o podziale $\boldsymbol{\beta}$**.**
Powyższe rozróżnienie jest właśnie treścią i rozwiązaniem paradoksu Zenona z Elei.

Aby bliżej to wyjaśnić, zastąpmy Achillesa i żółwia odpowiednio kotem i myszą.
Warunki zawodów są takie same: skok myszy jest zawsze 10 razy krótszy niż skok kota, oraz kot i mysz skaczą jednocześnie.
Jeżeli więc kot skoczy na odległość $\mathbf{\mathit{l}}$ w miejsce gdzie znajduje się mysz, to jednocześnie mysz odskoczy na odległość $\mathbf{\mathit{l}/10}$**,** itd, itd.

Tak więc, Zenon z Elei miał rację: tą metodą kot nigdy nie złapie myszy. Ale co się naskacze! Może tak skakać *nieskończenie długo,* zbliżając się do myszy *nieskończenie blisko,* co z kolei wprost sugeruje i podsuwa uogólnienie w postaci pojęcia *nieskończoności.*

Zauważmy, że wiele wieków później, tego samego rodzaju problem (paradoks) rozwiązywali w szczególny sposób – niezależnie od siebie, – Sir Isaac Newton (1642-1727) oraz Gotfried Wilhelm baron Leibniz (1646-1716), dokonując wynalazku w postaci rachunku różniczkowego:

wartość pochodnej funkcji **y = f(x)** *dla danej wartości* $\mathbf{x_o}$ *zmiennej niezależnej* **x**, *jest równa granicy ilorazu* $\mathbf{\Delta y/\Delta x}$, *gdy* $\mathbf{\Delta x \to 0}$, *oraz jest równa tangensowi kąta* $\boldsymbol{\alpha}$ *stycznej do krzywej* **y = f (x)** *w danym punkcie* $\mathbf{(x_o , y_o)}$**:**

$$\mathbf{f(x) = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Powyższe zawiera w sobie treści dyskutowanego tutaj paradoksu Zenona: pojęcie kierunkowości w układzie obserwatora, *i.e.* Achilles biegnie do miejsca spotkania, a nie do żółwia; oraz pojęcie „granicy w nieskończoności” w układzie względnym, *i.e.* Achilles biegnie do żółwia, a nie do miejsca spotkania.
Można więc dojść do zaskakującego wniosku, że w rachunku różniczkowym zachowane zostały wszystkie cechy paradoksu Zenona z Elei, łącznie z brakiem wskazania rozwiązania!

A tak, przy okazji. Zasady rachunku różniczkowego znał już w III w. p.n.e. niejaki… Archimedes!

„Strzała wypuszczona z łuku stoi w miejscu”

Obecnie rozpatrzmy inny, nie mniej znany paradoks Zenona z Elei:

> ***„Skoro wszystko, albo zawsze znajduje się w stanie spoczynku,***
> ***albo w ruchu i że jest w spoczynku, gdy zajmuje równą sobie przestrzeń,***
> ***a to co znajduje się w ruchu, znajduje się zawsze w jakimś teraz,***
> ***wobec tego strzała wypuszczona z łuku stoi w miejscu”.***

(według przekładu K. Leśniaka, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa 1968).

W pierwszej części tego paradoksu przedstawia się, że równorzędnymi cechami świata materialnego jest ruch oraz brak ruchu („stan spoczynku”).
W ogólności, twierdzenie powyższe nie jest prawdziwe. Odnosi się tylko do ruchu wzajemnego.
Natomiast w drugiej części paradoksu sugeruje się, że czas jest sumą dowolnej ilości „teraz”, na przykład chwil o wartości zerowej każda. Ponieważ strzała wypuszczona jest „w jakimś teraz”, czyli w chwili o wartości zero, to – powiedzmy – po 20 chwilach strzała też znajduje się „w jakimś teraz”, czyli w chwili o wartości zero, czyli strzała... „stoi w miejscu”, czyli w ogóle nie została „wypuszczona z łuku”.

Jednak czas $\boldsymbol{\tau}$ jest funkcją częstotliwości $\boldsymbol{\nu}$, która jest miarą powtarzalności zjawisk fizycznych, jako absolutnie pierwotnej, wręcz definicyjnej cechy tego świata materialnego.
Dla $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$ jest, że $\boldsymbol{\tau} = \infty$. Oznacza to brak powtarzalności (*„znajduje się zawsze w jakimś teraz”*), a także brak ruchu **(v = 0).**
Możemy więc przyjąć, że **v = 0,** czyli strzała *„jest w spoczynku, gdy zajmuje równą sobie przestrzeń”,* jak to sugeruje Zenon z Elei.

Ergo: nie ma ruchu! Możemy to zanotować w postaci:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v = 0} \\ \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \quad (\tau = \infty) \end{array}\right\} \qquad \mathbf{(I.1.12.)}$$

W powyższym paradoksie zawarta jest sugestia równoważności jakiegoś „teraz” dla dowolnego stanu ruchu strzały, w tym także dla braku ruchu (strzała jest nieruchoma).
Tym samym, zawarta jest sugestia, że stan spoczynku (brak ruchu) jest dokładnie równoważny stanowi ruchu.

Ale dla stanu spoczynku (brak ruchu, **v = 0**) brak jest powtarzalności ($\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$), a tym samym czas jako funkcja częstotliwości nie istnieje (formalnie – nieskończenie duży).
Z tego względu, nieistniejący czas nie ma charakteru chwili („jakiegoś teraz”).
„Coś” co nie istnieje nie może mieć innego „coś” co jest zaprzeczeniem tego „coś”.
Z tego właśnie względu, że w nieskończoności nie ma jakiegoś „teraz”, „wcześniej” czy „później”.

Zauważmy, że Zenon z Elei wyraźnie wskazuje, że tylko ciało będące w spoczynku zajmuje równą sobie przestrzeń. A to sugeruje, że w ruchu zajmuje inną przestrzeń.
A to z kolei wprost pokazuje, że stan ruchu to nie jest to samo co stan bezruchu.
Ergo: „strzała wypuszczona z łuku **nie stoi w miejscu”!**