

FIZYKA R.Resnick & D. Halliday

Zadanie 1

Masy i współrzędne czterech punktów materialnych są następujące:

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 \text{ kg} & x_1 &= y_1 = 0 \text{ cm} \\ m_2 &= 3 \text{ kg} & x_2 &= y_2 = 8 \text{ cm} \\ m_3 &= 2 \text{ kg} & x_3 &= 3 \text{ cm}; & y_3 &= 0 \text{ cm} \\ m_4 &= 6 \text{ kg} & x_4 &= -2 \text{ cm}; & y_4 &= -6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Znaleźć współrzędne środka masy tej grupy punktów materialnych.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} x_{\text{śr.}} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ y_{\text{śr.}} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \end{aligned}$$

po podstawieniu otrzymamy

$$\begin{aligned} x_{\text{śr.}} &= 1,125 \text{ cm} \\ y_{\text{śr.}} &= -0,75 \text{ cm} \end{aligned}$$

Zadanie 2

Na rysunku widzimy linie działania i ramiona dwóch sił względem punktu O .

Wyobraźmy sobie, że te siły działają na ciało sztywne podparte w punkcie O . Wszystkie przedstawione wektory znajdują się w płaszczyźnie rysunku.

Znaleźć wartość i kierunek wypadkowego momentu siły.



Rozwiązanie

Moment siły z definicji jest równy

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wartość wektora \vec{M} będącego wynikiem iloczynu wektorowego ramienia i siły możemy obliczyć następująco

$$M = rF \sin(\Theta)$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami \vec{r} i \vec{F} . Kierunek i zwrot wektora momentu siły możemy wyznaczyć z reguły tzw. śruby prawoskrętnej. W tym zadaniu wypadkowy moment siły wyrazi się jako

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Wektory \vec{M}_1 i \vec{M}_2 będą miały przeciwne zwroty, więc jako dodatni oznaczymy wektor \vec{M}_1 , który wychodzi przed płaszczyznę kartki. Wektor \vec{M}_2 oznaczymy jako ujemny, ten wchodzi za płaszczyznę kartki. Uwzględniając to możemy napisać

$$M = r_1 F_1 \sin(\Theta_1) - r_2 F_2 \sin(\Theta_2)$$

W zadaniu nie ma konkretnych wartości długości ramion, sił ani kątów, ale jeśli po podstawieniu danych do powyższego wzoru dostaniemy wynik dodatni to oznacza, że moment siły jest skierowany przed kartkę, a jeśli wynik będzie ujemny to znaczy, że moment siły jest skierowany za kartkę.

Zadanie 3

Drgający układ masa-sprężyna ma energię mechaniczną 1,0 J, amplitudę 0,10 m i prędkość maksymalną 1,0 m/s.

Obliczyć:

- współczynnik sprężystości sprężyny,
- masę i
- częstotliwość drgań.

Rozwiązanie

Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika równanie oscylatora harmonicznego

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

czyli

$$x = -\frac{m}{k} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

spełnia je funkcja

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

wynika również z niego, że częstość kołowa ω jest równa $\sqrt{\frac{k}{m}}$ więc wtedy

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Z poniższych równań możemy obliczyć masę i współczynnik sprężystości.

$$\underbrace{\frac{mv_{max}^2}{2}}_{\text{max. energia kinetyczna}} = \underbrace{\frac{kA^2}{2}}_{\text{max. energia potencjalna}} = E$$

więc

$$m = \frac{2E}{v_{max}^2}$$

$$k = \frac{2E}{A^2}$$

Jak napisano wyżej

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

więc po podstawieniu

$$\omega = \frac{v_{max}}{A}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$k = 200 \frac{N}{m}$$

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$\omega = 10 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \nu = 1,59 \text{ Hz}$$