

Dynamika ruchu postępowego, ruchu punktu materialnego po okręgu i ruchu obrotowego bryły sztywnej

Dynamika ruchu postępowego

1. Balon opada ze stałą prędkością. Jaką masę balastu należy wyrzucić, aby balon zaczął wznosić się z tą samą prędkością? Masa balonu (z balastem) wynosi 300 kg, a siła wyporu 2900N.

Rozwiązanie:

Na balon działają siły:

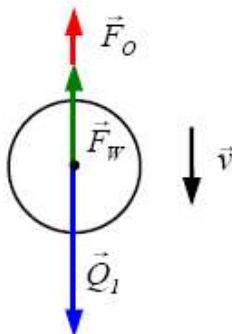
ciężkości $\vec{Q}$,

wyporu $\vec{F}_w$ i

oporu powietrza $\vec{F}_o$.

Ponieważ balon w dół i w górę porusza się ze stałą prędkością, to na podstawie I zasady dynamiki Newtona, suma tych sił, (czyli siła wypadkowa) wynosi zero. Wartość siły oporu powietrza F_o zależy od prędkości poruszającego się ciała. W naszym zadaniu wartości prędkości przy opadaniu i wznoszeniu balonu są takie same, a więc także wartości sił oporu są jednakowe.

$$\vec{Q} + \vec{F}_w + \vec{F}_o = 0$$



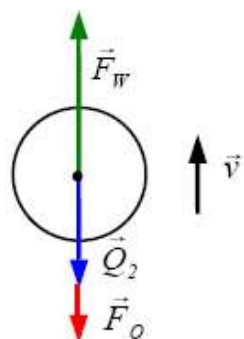
Jeżeli balon opada,
równanie wiążące wartości sił ma postać:

$$Q_1 - F_w - F_o = 0$$

gdzie

$$Q_1 = Mg$$

Gdy balon wznosi się:



$$Q_2 + F_o - F_w = 0$$

$$Q_2 = (M - m)g$$

gdzie m – masa wyrzuconego balastu.

Rozwiązując te równania otrzymamy:

$$m = 2 \left(M - \frac{F_w}{g} \right)$$

a po wstawieniu wartości liczbowych:

$$m = 2 \left(300 \text{ kg} - \frac{2900 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 20 \text{ kg}$$

2. Małpka wspina się po pionowej lianie z przyspieszeniem $0,5 \text{ m/s}^2$. Oblicz siłę napinającą lianę, jeżeli masa małpki wynosi 5 kg . Masę liany zaniedbać.

Rozwiązanie:

Małpka działa na lianę siłą $\vec{F}$ skierowaną w dół. Jest to siła napinająca lianę. Zgodnie z III zasadą dynamiki, liana działa na małpkę siłą reakcji $\vec{F}_R$ o takiej samej wartości, skierowaną ku górze. Drugą siłą działającą na małpkę jest siła ciężkości $\vec{Q}$. Wypadkowa tych dwóch sił, zgodnie z II zasadą dynamiki nadaje małpce przyspieszenie $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{Q}$$

Wartość siły F_R wyznaczymy z równania:

$$ma = F_R - Q$$

gdzie

$$Q = mg$$

m – masa małpki.

Ostatecznie:

$$F = F_R = m(a + g)$$

$$F = 5 \text{ kg} \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 52,5 \text{ N}$$

3. Winda może poruszać się w górę i w dół z przyspieszeniem o takiej samej wartości. W windzie tej na wadze sprężynowej stoi studentka. Różnica wskazań wagi przy ruchu w górę i w dół wynosi 50 N. Jakie jest przyspieszenie windy, jeżeli ciężar studentki wynosi 500 N?

Rozwiązanie:

Na studentkę działają dwie siły:

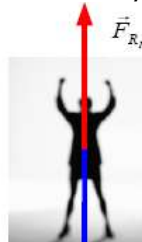
ciężkości $\vec{Q} = m \vec{g}$

oraz reakcji podłoża $\vec{F}_R$ (wagi).

Siła wypadkowa wynosi:

$$m \vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R.$$

Wartość siły $\vec{F}_R$ równa jest sile nacisku na wagę (III zasada dynamiki), czyli wskazaniu wagi. Ruch w górę:

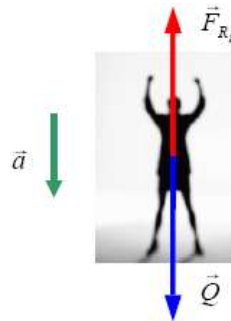


$$ma = F_{R_i} - Q$$

$$Q = m g$$

(1)

Ruch w dół:



$$ma = Q - F_{R_2}$$

(2)

Różnica sił reakcji, (czyli także wskazań wagi) wyznaczonych z równań (1) i (2) wynosi:

$$\Delta F_R = F_{R_1} - F_{R_2} = 2ma = 2 \frac{Q}{g} \cdot a$$

czyli:

$$a = \frac{\Delta F_R \cdot g}{2Q} = \frac{50 \text{ N} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 500 \text{ N}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4. W wagonie poruszającym się poziomo z pewnym przyspieszeniem wisi na nici ciężarek o masie 100 g. Nici odchylona jest od pionu o kąt 15° . Oblicz przyspieszenie wagonu i siłę napinającą nici.

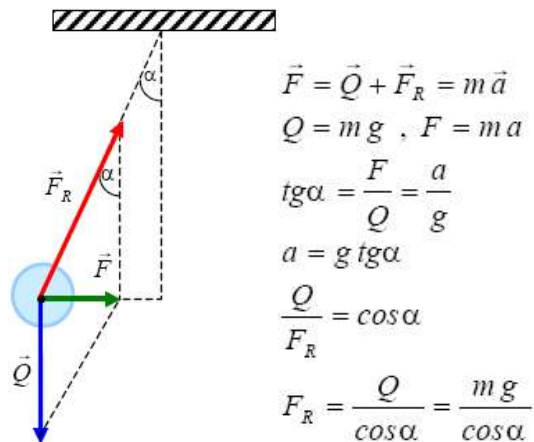
Rozwiązanie:

Na ciężarek działają siły:

ciężkości $\vec{Q} = m \vec{g}$

oraz reakcji nici $\vec{F}_R$.

Ich wypadkowa $\vec{F}$ nadaje ciężarkowi poziome przyspieszenie $\vec{a}$.
Jest to zarazem przyspieszenie wagonu.



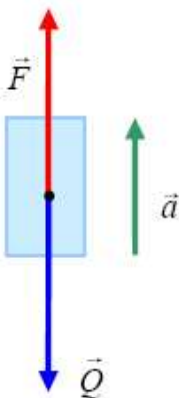
Siła napinająca nić ma taką samą wartość jak siła F_R z jaką nić działa na ciężarek.
Liczbowe wartości:

$$\begin{aligned}a &= 10 \frac{m}{s^2} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 2,68 \frac{m}{s^2} \\ F_R &= \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{\cos 15^\circ} = 1,035 \text{ N}\end{aligned}$$

5. Dźwig podnosi ciężar Q zawieszony na linie, której dopuszczalne naprężenie wynosi $F_{\max}$. Znajdź najkrótszy czas, w którym można podnieść ten początkowo spoczywający ciężar na wysokość h . Opory ośrodka i ciężar liny pominąć.

Rozwiązanie:

Na ciało działają dwie siły: ciężkości $\vec{Q}$ i siła $\vec{F}$ przyłożona przez linę.
Ciało porusza się w górę z przyspieszeniem $\vec{a}$, czyli:



$$\begin{aligned}m \vec{a} &= \vec{F} + \vec{Q} \\ m a &= F - Q \\ m &= \frac{Q}{g} \\ F &= m a + Q = \frac{Q}{g} \cdot a + Q\end{aligned}$$

Siła napinająca linę jest równa, co do wartości, sile F i maksymalna wartość przyspieszenia $a_{\max}$ spełnia równanie:

$$F_{\max} = \frac{Q}{g} a_{\max} + Q$$

$$a_{\max} = \frac{(F_{\max} - Q)g}{Q} = \left(\frac{F_{\max}}{Q} - 1 \right) g$$

Przyspieszeniu $a_{\max}$ odpowiada najkrótszy czas $t_{\min}$ podnoszenia ciała na wysokość h , taki że:

$$h = \frac{1}{2} a_{\max} \cdot t_{\min}^2$$

Ostatecznie:

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2h}{a_{\max}}} = \sqrt{\frac{2h}{\left(\frac{F_{\max}}{Q} - 1 \right) g}}$$

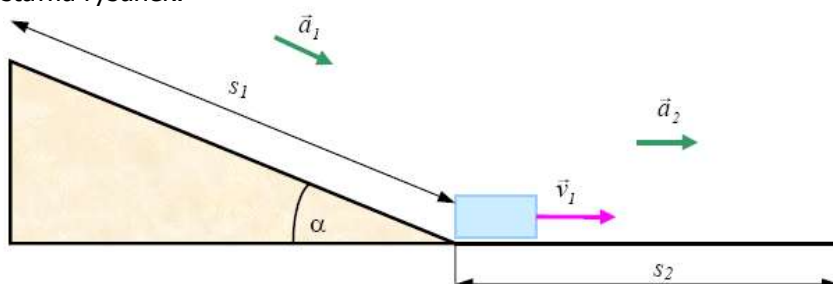
Uwaga: na wysokości h prędkość ciała wynosi

$$v_{\max} = a_{\max} \cdot t_{\min} = \sqrt{2h \cdot a_{\max}}$$

6. Sanki zsunęły się za zbocza o nachyleniu 30° i długości 20m, po czym do chwili zatrzymania przebyły odległość 200 m po torze poziomym. Współczynnik tarcia na całej trasie jest jednakowy. Wyznacz jego wartość.

Rozwiązanie:

Drogę sanek przedstawia rysunek:



Niech a_1 i a_2 oznaczają przyspieszenia na odcinkach drogi s_1 i s_2 , a t_1 i t_2 czasy przebycia tych odcinków. v_1 jest prędkością u dołu zbocza. Związki między tymi wielkościami przedstawiają następujące równania kinematyczne:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad (1)$$

$$v_1 = a_1 t_1$$

(2)

$$s_2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

(3)

$$0 = v_1 + a_2 t_2$$

(4)

Eliminując czas t_1 z równań (1) i (2) znajdujemy:

$$v_1 = \sqrt{2s_1 a_1}$$

(5)

Równania (3) i (4) pozwalają otrzymać:

$$s_2 = -\frac{v_1^2}{2a_2}$$

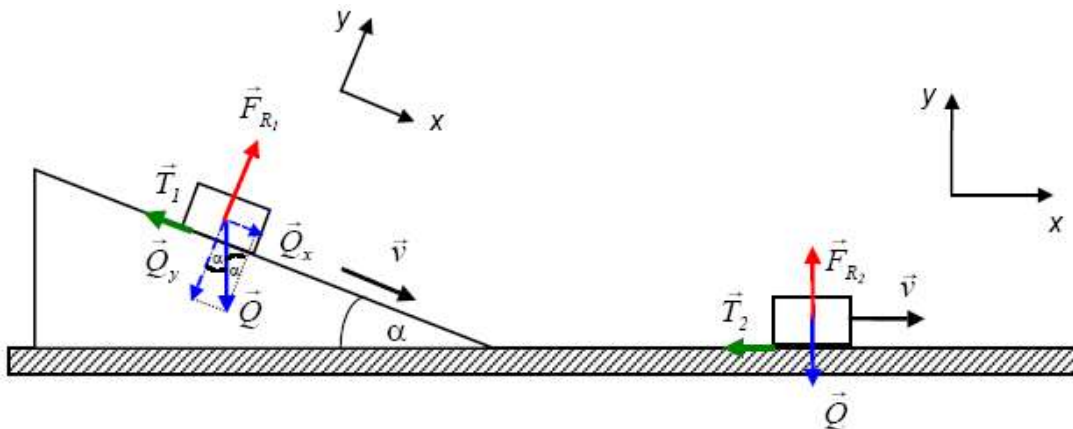
(6)

czyli

$$s_2 = -\frac{2s_1 a_1}{2a_2} = -\frac{a_1}{a_2} s_1$$

(7)

Dalej należy wyznaczyć przyspieszenia a_1 i a_2 , które zależą od współczynnika tarcia (tarcie kinetyczne). Układ sił działających na sanki na odcinkach s_1 i s_2 przedstawia rysunek:



Na sanki działają trzy siły: ciężkości $\vec{Q}$, tarcia kinetycznego $\vec{T}_{IT}$ lub $\vec{T}_{2T}$ oraz reakcji podłoża $\vec{F}_{R1}$ lub $\vec{F}_{R2}$.

Siły $\vec{Q}_x$ i $\vec{Q}_y$ są rzutami wektora $\vec{Q}$ na kierunek równoległy i prostopadły do równi (zbocza), $\vec{v}$ oznacza prędkość ciała. Ponieważ ciało nie porusza się w kierunku prostopadłym do podłoża (kierunek y), to I zasada dynamiki pozwala napisać

$$\vec{F}_{R1} + \vec{Q}_y = 0$$

czyli

$$F_{R_1} - Q_y = 0 \quad (8)$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{F}_{R_2} + \vec{Q} &= 0 \\ F_{R_2} - Q &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie

$$Q = mg$$

a

$$Q_y = Q \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

m – masa ciała.

Dla kierunku równoległego do podłoża (kierunek x) stosujemy II zasadę dynamiki (ruch jednostajnie zmienny):

$$\vec{Q}_x + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1$$

co oznacza:

$$Q_x - T_1 = ma_1 \quad (10)$$

gdzie

$$Q_x = Q \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{T}_2 &= m\vec{a}_2 \\ -T_2 &= ma_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Wartości sił tarcia T_1 i T_2 określają związki:

$$\begin{aligned} T_1 &= f F_{R_1} \\ T_2 &= f F_{R_2} \end{aligned} \quad (12)$$

Przyspieszenie a_1 znajdujemy z równań (8), (10) i (12):

$$a_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (14)$$

Jest to wyrażenie pozwalające obliczyć przyspieszenie ciała zsuwającego się z równi pochyłej o kącie nachylenia α , gdy współczynnik tarcia wynosi f .

Przyspieszenie a_2 wyznaczamy z równań: (9), (11) i (13):

$$a_2 = -f g \quad (15)$$

Znak minus oznacza, że przyspieszenie ma zwrot przeciwny do przyjętego za dodatni (kierunek x) i ruch jest jednostajnie opóźniony. Wracając do równania (7), po skorzystaniu z (14) i (15) mamy:

$$s_2 = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{f} \cdot s_1$$

Po przekształceniu znajdujemy poszukiwany współczynnik tarcia:

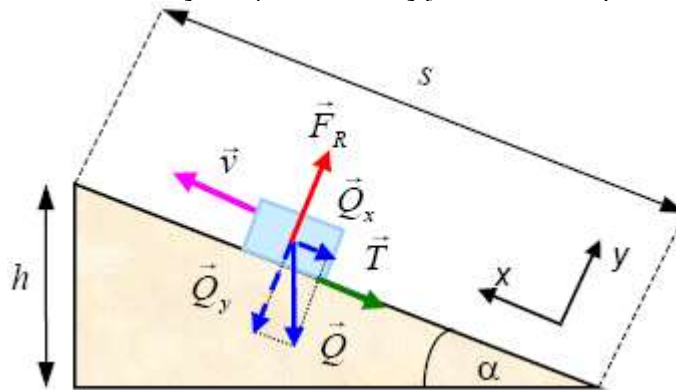
$$f = \frac{\sin \alpha}{\frac{s_2}{s_1} + \cos \alpha} \quad (16)$$

Dla $\alpha = 30^\circ$, $s_1 = 20 \text{ m}$, $s_2 = 200 \text{ m}$ otrzymujemy:
 $f = 0,046$.

7 ■ Oblicz wysokość, na jaką może wjechać samochód, który mając początkową prędkość 72 km/h, porusza się w górę z wyłączonym silnikiem. Nachylenie zbocza wynosi 30° , a efektywny współczynnik tarcia 0,1.

Rozwiązanie:

Układ sił ciężkości $\vec{Q}$, tarcia $\vec{T}$ i reakcji $\vec{F}_R$, które działają na samochód przedstawia rysunek.



Równanie wektorowe, wynikające z II zasady dynamiki, ma postać:

$$m \vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R + \vec{T}$$

Rzutując wektory na kierunki x i y otrzymamy równania wiążące wartości sił:

$$m a = -Q_x - T \quad (1)$$

$$0 = -Q_y + F_R \quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q \sin \alpha = mg \sin \alpha \\ Q_y &= Q \cos \alpha = mg \cos \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

$$T = f F_R$$

Wartość przyspieszenia a w kierunku x wyznaczona z równań (1) ÷ (3) wynosi:

$$a = -g(\sin\alpha + f \cos\alpha) \quad (4)$$

Znak minus oznacza, że wektor ma zwrot przeciwny do zwrotu osi x .

Samochód do chwili zatrzymania się przebędzie drogę s w czasie t , a jego prędkość zmaleje od wartości v_0 (na dole zbocza) do zera (na wysokości h).

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$0 = v_0 + at \quad (5)$$

$$h = s \cdot \sin\alpha \quad (6)$$

Z równań (5) i (6) otrzymamy:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} \quad (7)$$

Ostatecznie równania (4), (7) i (8) dają:

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha}{2g(\sin\alpha + f \cos\alpha)} \quad (8)$$

Dla

$$v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

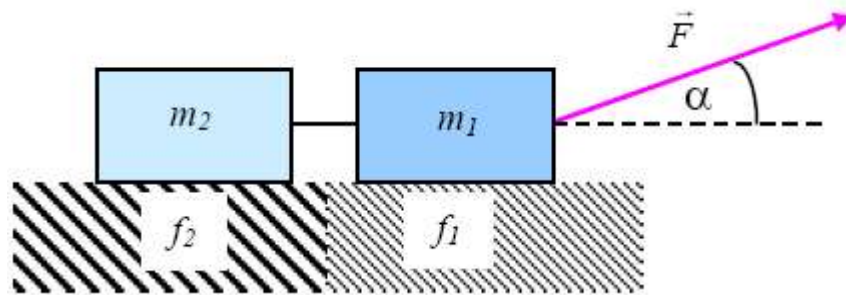
$$f = 0,1$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

otrzymamy: **$h = 17,5 \text{ m}$.**

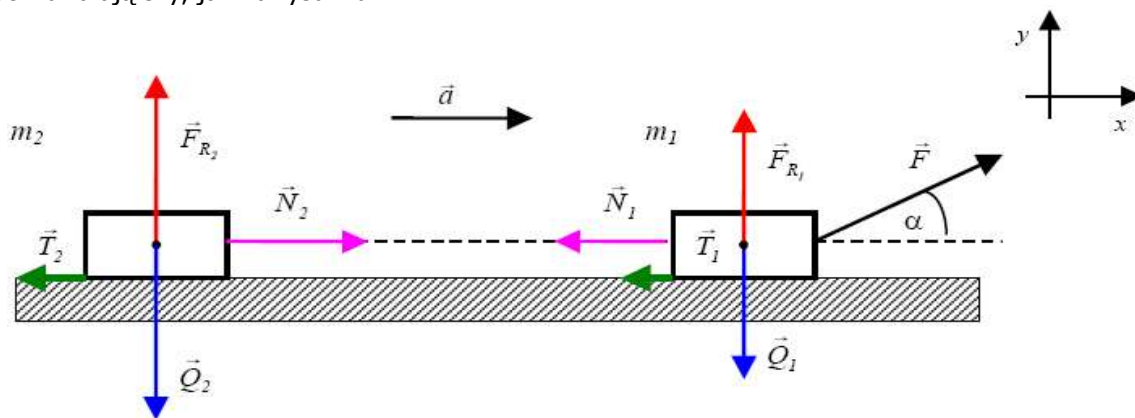
8.

Dwa klocki o masach m_1 i m_2 związane nieważką i nierozciągliwą nicią leżą na poziomym stole. Do pierwszego z nich przyłożono siłę F pod kątem α (patrz rys. 5.1.8.). Współczynniki tarcia między klockami, a stołem wynoszą odpowiednio f_1 i f_2 . Oblicz przyspieszenie klocków i siłę napinającą nić.



Rozwiązanie:

Na klocki działają siły, jak na rysunku.



- $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ - siły ciężkości,
- $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ - siły tarcia,
- $\vec{F}_{R_1}, \vec{F}_{R_2}$ - siły reakcji podłoża,
- $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ - siły, jakimi nić działa na klocki,
- $\vec{F}$ - dodatkowa siła zewnętrzna.

Oba klocki (bryły sztywne) i nierozciągliwa nić poruszają się z takim samym przyspieszeniem $\vec{a}$ (kierunek x). Druga zasada dynamiki w zapisie wektorowym ma postać:

$$m_1 \vec{a} = \vec{F} + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{R_1} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1$$

dla klocka o masie m_1
oraz

$$m_2 \vec{a} = \vec{N}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{R_2} + \vec{T}_2$$

dla klocka o masie m_2 .

Rzutując te wektory na kierunki x i y otrzymujemy równania:

$$m_1 a = F \cos \alpha - N_1 - T_1 \quad (1)$$

$$0 = F \sin \alpha - Q_1 + F_{R_1}$$

$$m_2 a = N_2 - T_2$$

$$0 = -Q_2 + F_{R_2} \quad (2)$$

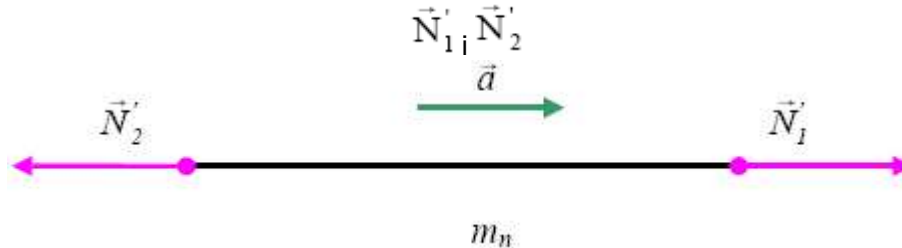
Równania uzupełniające:

$$Q_1 = m_1 g \quad T_1 = f_1 F_{R_1}$$

(3)

$$Q_2 = m_2 g \quad T_2 = f_2 F_{R_2}$$

Przyjmujemy na chwilę, że nić posiada masę m_n . Klocki na nić działają siłami



Oznacza to, że:

$$m_n a = N'_1 - N'_2 \quad (4)$$

Widać, że gdy $m_n = 0$ (nić nieważka) to

$$N'_1 = N'_2$$

Ale zgodnie z III zasadą dynamiki:

$$N'_1 = N_1$$

oraz

$$N'_2 = N_2$$

A więc dla nieważkiej nici:

$$N_1 = N_2 = N \quad (5)$$

Równania: (1), (2), (3), (4) i (5) pozwalają wyznaczyć przyspieszenie układu:

$$a = \frac{F(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha) - g(f_1 m_1 + f_2 m_2)}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

oraz siłę napinającą nić:

$$N = m_2 \frac{F(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha) + m_1 g(f_2 - f_1)}{m_1 + m_2} \quad (7)$$

Powyższa analiza jest słuszna, jeżeli

$$Q_1 > F \sin \alpha$$

(klocek nie odrywa się od podłoża) i

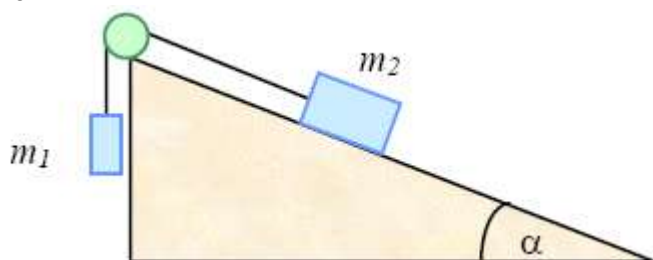
$$F(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha) \geq g(f_1 m_1 + f_2 m_2)$$

(czyli $a \geq 0$).

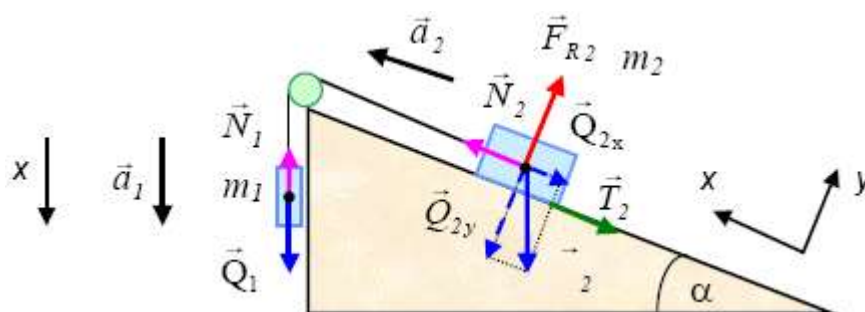
Maksymalna wartość przyspieszenia i napięcia nici wystąpi dla kąta $\alpha_{\max}$, takiego, że $\tan \alpha_m = f_1$ (maksimum wyrażenia: $\cos \alpha + f_1 \sin \alpha$).

Wzory (6) i (7) można stosować również w przypadku, gdy siła $\vec{F}$ skierowana jest w dół względem poziomym. Wtedy przyjmujemy $\alpha < 0$.

9. Dwa ciężarki o masach m_1 i m_2 połączono nieważką i nierozciągliwą nicią przerzuconą przez błocek znajdujący się na szczycie równi



Współczynnik tarcia między ciężarkiem m_2 i równią wynosi f_2 , a kąt nachylenia równi α . Masę błočka można pominąć. Wyznacz siłę napięcia nici i przyspieszenie ciężarków, przyjmując, że ciężarek m_1 porusza się w dół. 5.1.9.R.



$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$

- siły ciężkości,

$\vec{N}_1, \vec{N}_2$

- siły z jakimi nić działa na ciężarki, r

$\vec{T}_2$

- siła tarcia,

$\vec{F}_{R_2}$

- reakcja podłoża.

Równania wektorowe są następujące:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{N}_1,$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{N}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{R2}$$

Rzuty tych wektorów na kierunki x i y tworzą równania:

$$m_1 a_1 = Q_1 - N_1$$

oraz

$$m_2 a_2 = N_2 - Q_{2x} - T_2$$

$$0 = F_{R2}^{(1)} - Q_{2y}.$$

Gdzie

$$Q_1 = m_1 g \quad Q_2 = m_2 g$$

$$Q_{2x} = Q_2 \sin \alpha = m_2 g \sin \alpha$$

$$Q_{2y} = Q_2 \cos \alpha = m_2 g \cos \alpha$$

$$T_2 = f_2 F_{R2}$$

Nierozciągłość nici oznacza, że $a_1 = a_2 = a$. Z kolei nieważkość nici i bloczka sprawia, że:

$$N_1 = N_2 = N$$

Wykorzystując powyższe związki otrzymujemy następujący układ równań:

$$m_1 a = m_1 g - N$$

$$m_2 a = N - m_2 g \sin \alpha - f_2 m_2 g \cos \alpha$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$a = \frac{m_1 - m_2 (\sin \alpha + f_2 \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$N = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + f_2 \cos \alpha)}{m_1 + m_2}$$

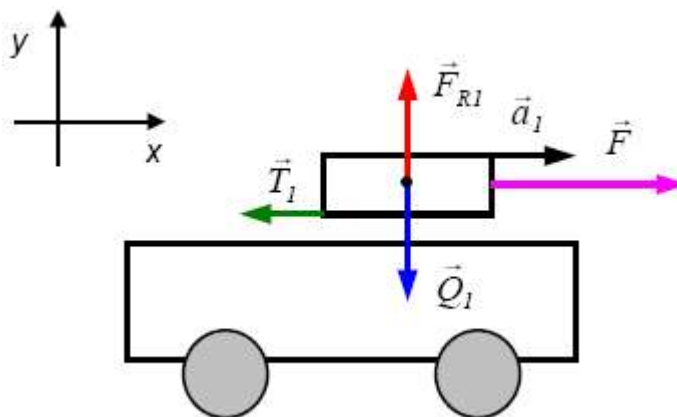
Uwaga: jeżeli ciężarki poruszałyby się w przeciwną stronę, wartości przyspieszenia i siły naciągu nici wynosiłyby:

$$a = \frac{m_2 (\sin \alpha - f_2 \cos \alpha) - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$N = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha - f_2 \cos \alpha)}{m_1 + m_2}$$

10. Kłócek o masie $m = 3 \text{ kg}$ położono na wózek o masie $M = 15 \text{ kg}$. Współczynnik tarcia między tymi ciałami wynosi $f = 0,2$. Na kłócek działa pozioma siła $F = 20 \text{ N}$, a wózek może poruszać się swobodnie (bez tarcia) po szynach. Znajdź przyspieszenie kłocka względem wózka.

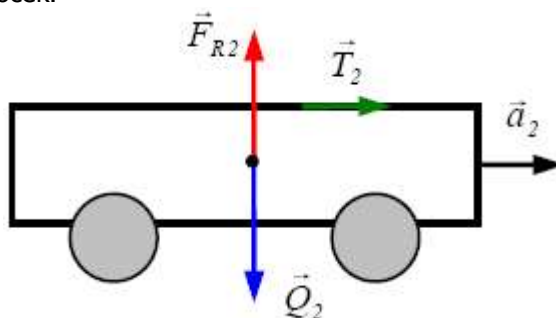
Rozwiązanie:



II zasada dynamiki dla kłocka, kierunek poziomy, równanie skalarne:

$$m a_1 = F - T_1 \quad (1)$$

gdzie a_1 – przyspieszenie kłocka w układzie odniesienia związanym z Ziemią, T_1 – siła tarcia działająca na kłócek.



II zasada dynamiki dla wózka, kierunek poziomy:

$$M a_2 = T_2 \quad (2)$$

gdzie a_2 – przyspieszenie wózka w układzie odniesienia związanym z Ziemią, T_2 – siła tarcia działająca na wózek.

Oczywiście z III zasady dynamiki mamy:

$$T_1 = T_2 = T$$

Przyspieszenie kłocka względem wózka wynosi:

$$a_{\text{w}} = a_1 - a_2 \quad (3)$$

Korzystając z równań (1) i (2) otrzymamy:

$$a_w = \frac{F - T \left(1 + \frac{m}{M} \right)}{m} \quad (4)$$

Przyspieszenie a_w spełniać musi warunek: $a_w \geq 0$, co oznacza, że powinna wystąpić relacja:

$$F \geq T \left(1 + \frac{m}{M} \right) \quad (5)$$

Siła tarcia przyjmować może wartości od 0 do

$$T_{max} = f F_{Rl} = f Q_l = f mg$$

W tym zadaniu

$$T_{max} = 0,2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \text{ N}$$

czyli

$$T_{max} \left(1 + \frac{m}{M} \right) = 6 \text{ N} \left(1 + \frac{3}{15} \right) = 7,2 \text{ N}$$

Ponieważ $F = 20 \text{ N}$, widać, że nierówność (5) jest spełniona, czyli $a_w > 0$ i klocek przesuwany jest względem wózka. Występujące tarcie jest tarcie kinetycznym, a siła tarcia przyjmuje wartość T_{max} . Zatem przyspieszenie klocka względem wózka wynosi:

$$a_w = \frac{F - T_{max} \left(1 + \frac{m}{M} \right)}{m} = \frac{20 \text{ N} - 7,2 \text{ N}}{3 \text{ kg}} = 4,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dla

$$F \leq 7,2 \text{ N}$$

klocek względem wózka nie porusza się i $a_w = 0$.