

2.6.3 Interferencja fal.

Pojęcie *interferencja* odnosi się do fizycznych efektów nie zakłóconego nakładania się dwóch lub więcej ciągów falowych. Doświadczenie uczy, że fale mogą przebiegać ten sam obszar przestrzeni niezależnie od siebie — każdy ciąg fal rozchodzi się w przestrzeni tak, jakby nie było innych ciągów. Oznacza to, że przy opisie zjawisk interferencyjnych można stosować tzw. *zasadę superpozycji*:

Jeżeli do wybranego punktu ośrodka dociera jednocześnie kilka ciągów fal, to punkt ten doznaje wychylenia, będącego sumą wychyleń, wywołanych przez poszczególne ciągi fal.

W przypadku fal rozchodzących się w ośrodkach sprężystych zasada ta obowiązuje, gdy amplituda drgania wypadkowego jest mała — tak że dopuszczalne jest stosowanie prawa Hooke'a (tzn. gdy matematyczna zależność między odkształceniami i siłą przywracającą stan równowagi jest relacją proporcjonalności).

Rozważmy dwie fale o równych częstościach i amplitudach, biegnące z taką samą prędkością w tym samym kierunku, lecz o różnych fazach — na przykład wskutek różnicy przebytych dróg. Równania tych fal mają następującą postać (por. wzór (2.196)) :

$$y_1 = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right) \right], \quad (2.1)$$

$$y_2 = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_2}{v} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Znajdźmy teraz falę wypadkową, która opisana jest przez sumę równań (2.1) i (2.2):

$$y = y_1 + y_2 = A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right) \right] + \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_2}{v} \right) \right] \right\}. \quad (2.3)$$

Korzystając z zależności trygonometrycznej

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (2.4)$$

ze wzoru (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} y &= 2A \cos \frac{\omega (2t - x_1/v - x_2/v)}{2} \cos \frac{\omega (x_2 - x_1)/v}{2} \\ &= 2A \cos \left(\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \right) \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$B = 2A \cos \left(\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \right) \quad (2.6)$$

oraz

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}, \quad (2.7)$$

równanie fali wypadkowej możemy zapisać w postaci

$$y = B \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right], \quad (2.8)$$

w której B jest jej amplitudą. Z powyższego wzoru oraz zależności (2.6) wynika, że amplituda fali wypadkowej osiąga wartość maksymalną $B = \pm 2A$ gdy $\cos [\pi (x_2 - x_1) / \lambda] = \pm 1$, tj. jeżeli

$$\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

tzn. gdy różnica dróg przebytych przez interferujące fale jest *całkowitą wielokrotnością długości fali* λ , czyli gdy

$$x_2 - x_1 = n\lambda. \quad (2.10)$$

Oznacza to, że fale spotykają się *w zgodnych fazach*. Z kolei amplituda fali wypadkowej $B = 0$ gdy $\cos [\pi (x_2 - x_1) / \lambda] = 0$, tzn. gdy

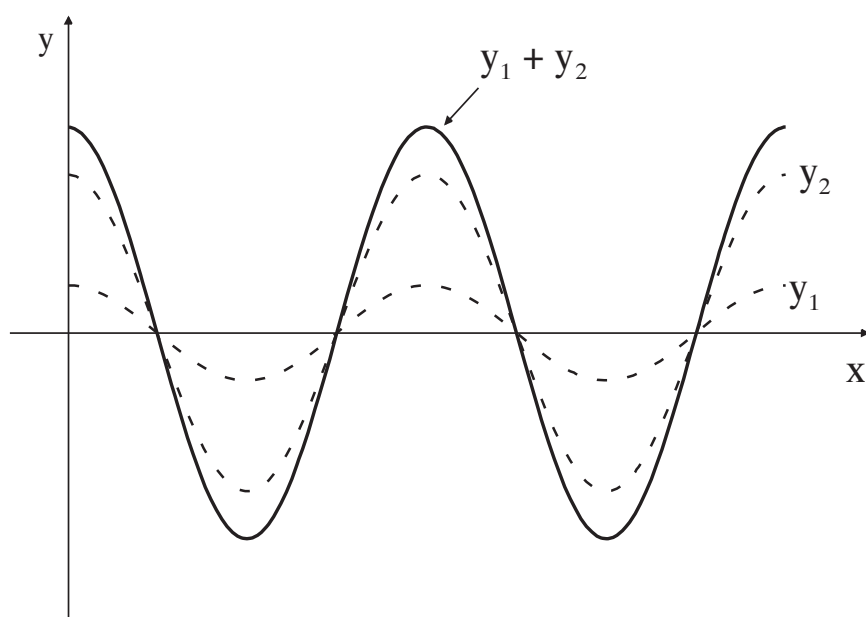
$$\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{2n + 1}{2}. \quad (2.11)$$

Interferujące fale ulegają więc wygaszeniu jeżeli

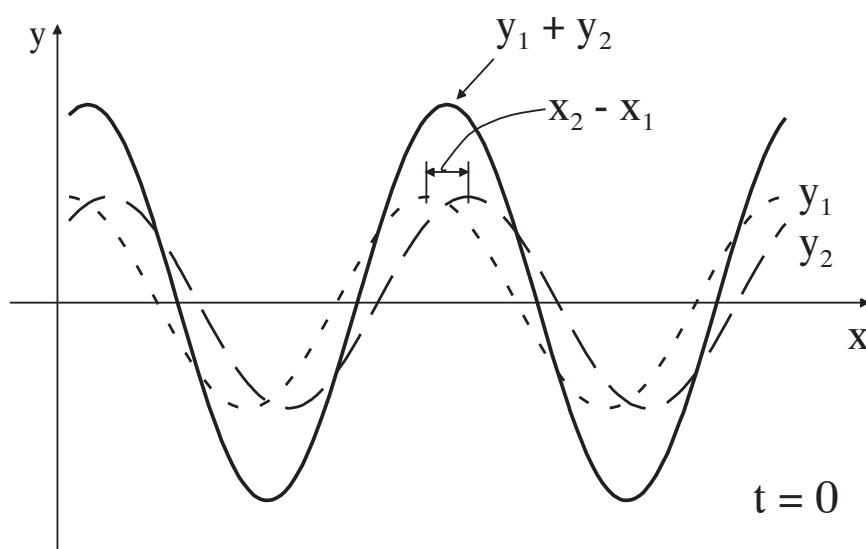
$$x_2 - x_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (2.12)$$

tj. gdy różnica dróg przebytych przez fale jest *nieparzystą wielokrotnością połówek długości fali*, a więc gdy fale spotykają się *w przeciwnych fazach* (różnica faz wynosi π lub nieparzystą wielokrotność π).

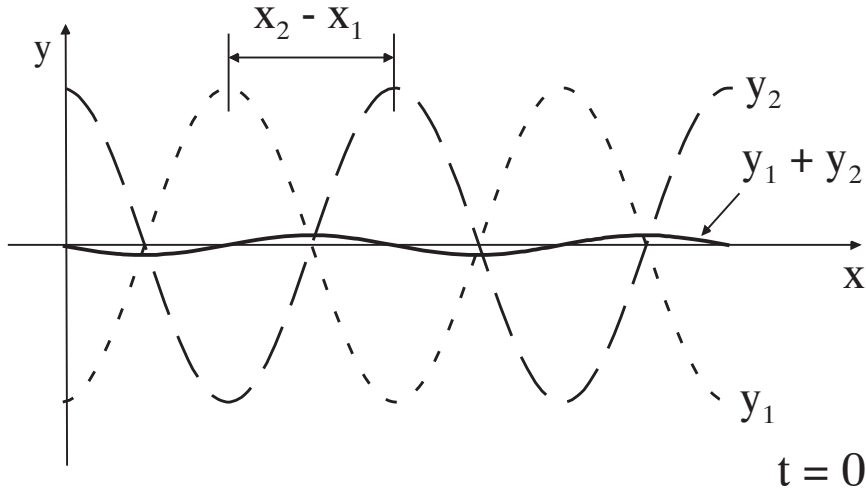
Rysunek 2.1 przedstawia wynik interferencji dwóch fal o takich samych częstościach i fazach, lecz o różnych amplitudach: częstość fali wynikowej nie ulega zmianie, jej amplituda jest sumą amplitud fal składowych. Rezultatem interferencji dwóch fal o jednakowych częstościach i amplitudach lecz przesuniętych nieco w fazie jest fala o amplitudzie prawie dwukrotnie większej od amplitudy każdej z fal składowych (rys. 2.2). Z kolei, gdy interferujące fale są przesunięte w fazie o prawie π , amplituda fali wypadkowej jest bliska zeru (rys. 2.3).



Rysunek 2.1:



Rysunek 2.2:



Rysunek 2.3:

2.6.4 Fale stojące

Rozpatrzmy teraz przypadek dwóch ciągów fal, które mają te same częstotliwości i amplitudy, lecz rozchodzą się w przeciwnych kierunkach. Załóżmy, że mamy do czynienia z falami opisanymi równaniami:

$$y_1 = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (2.13)$$

$$y_2 = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (2.14)$$

W wyniku ich superpozycji otrzymamy falę wypadkową

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\omega(t + x/v) - \omega(t - x/v)}{2} \cos \omega t \\ &= 2A \cos \left(\omega \frac{x}{v} \right) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dzieje się tak, gdy np. fala — rozchodząc się w ośrodku ograniczonym — napotyka na falę odbitą od granicy ośrodka *bez straty energii*, rozchodzącą się w kierunku przeciwnym. Korzystając z zależności $\omega = 2\pi\nu$, $v = \lambda\nu$ (v — szybkość fali, ν i λ — częstotać i długość fali), powyższe równanie możemy przepisać w postaci

$$\boxed{y = B \cos \omega t}, \quad (2.16)$$

w której B — jak poprzednio — oznacza amplitudę drgań wypadkowych

$$\boxed{B = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}. \quad (2.17)$$

Wyrażenia (2.16) i (2.17) tworzą równanie tzw. *fali stojącej*. Wynika z niego, że w każdym punkcie przestrzeni mamy do czynienia z ruchem harmonicznym o tym samym okresie co drgania składowe. Z wyrażenia (2.17) wynika, że amplituda drgania wypadkowego zależy od współrzędnej przestrzennej x . W punktach gdzie $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$, tzn. gdy spełniony jest warunek

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (2.18)$$

amplituda ta równa jest zeru. Powyższy warunek można zapisać w postaci

$$\boxed{x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots}. \quad (2.19)$$

Tak więc $B = 0$ dla $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \dots$. Odległość sąsiednich punktów, w których amplituda jest równa zeru wynosi $\frac{\lambda}{2}$. Punkty te — pozostające stale w spoczynku — nazywamy *węzłami*. Z kolei w punktach, w których $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm 1$ amplituda jest maksymalna i wynosi $\pm 2A$. Ma to miejsce gdy spełniony jest warunek

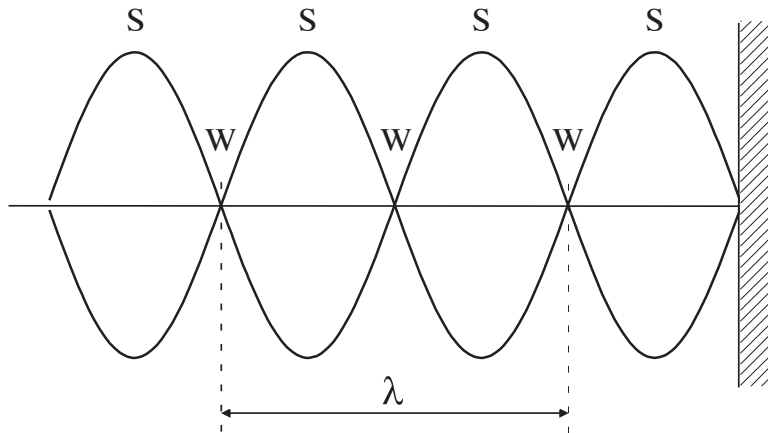
$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi, \quad (2.20)$$

tzn. gdy

$$\boxed{x = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots}. \quad (2.21)$$

Zatem $B = \pm 2A$ dla $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2} \dots$. Odległość sąsiednich punktów, w których amplituda jest równa zeru wynosi również $\lambda/2$. Punkty te nazywamy *strzałkami*. Podobnie jak węzły, strzałki nie poruszają się. Rysunek 2.4 przedstawia przykładową falę stojącą, której węzły znajdują się na granicy ośrodka. Jak wynika z rysunku, między każdymi dwiema strzałkami znajduje się węzeł, tak że odległość między węzłem a sąsiednimi strzałkami wynosi $\frac{\lambda}{4}$.

Jak już wspomnieliśmy, warunkiem powstania fali stojącej jest nałożenie się na siebie dwóch ciągów fal, poruszających się w przeciwnych kierunkach. Załóżmy, że wzdłuż napiętego sznura, przymocowanego sztywno do ściany, przebiega impuls. Po dobiegnięciu do końca sznura impuls oddziałuje na



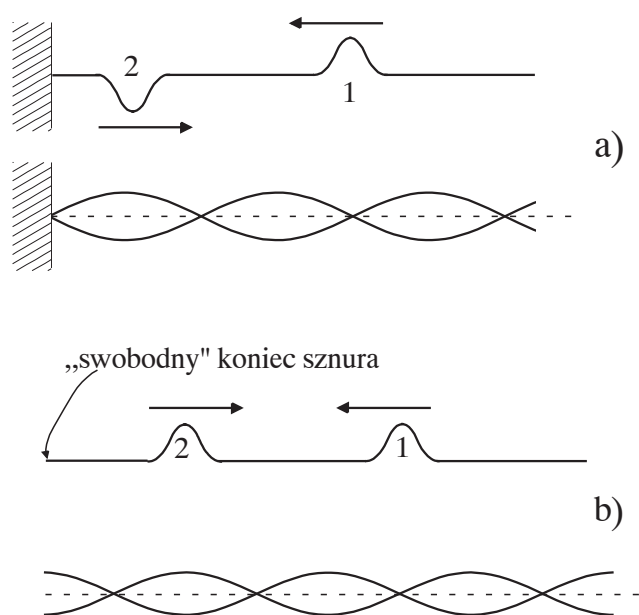
w - węzły, s - strzałki

Rysunek 2.4:

miejsce zamocowania siłą skierowaną do góry. Sztywny uchwyt nie może się jednak poruszać i działa na sznur siłą o tej samej wartości lecz przeciwnie skierowaną. Ta siła — siła reakcji — generuje impuls biegnący z powrotem wzdłuż sznura, w kierunku przeciwnym do kierunku impulsu padającego. Impuls odbity od zamocowanego końca jest zawsze przesunięty w fazie o π względem impulsu padającego. Tak więc w punkcie zamocowania sznura impulsy wygaszą się wzajemnie — powstanie zatem węzeł fali stojącej (rys. 2.5(a)).

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym koniec sznura jest zamocowany do ściany nie bezpośrednio, lecz za pomocą dłuższego kawałka cienkiego, wiotkiego sznurka — koniec ten jest więc „swobodny”. Wówczas wychylenie do góry swobodnego końca sznura odbija się bez zmiany fazy. Zatem nakładające się w punkcie zamocowania impulsy padający i odbity dodają się do siebie — powstaje tu strzałka fali stojącej (rys. 2.5(b)). Opisaną powyżej prawidłowość można przedstawić w postaci bardziej ogólnej:

Jeżeli fala odbija się od ośrodka gęstszego, to na granicy ośrodków powstaje węzeł; jeżeli odbicie następuje od ośrodka rzadszego — w miejscu odbicia powstaje strzałka fali stojącej.



Rysunek 2.5:

2.6.5 Dudnienia.

Z innym typem interferencji mamy do czynienia gdy przez ten sam obszar przestrzeni przebiegają w tym samym kierunku dwie fale o różnych częstotliwościach. Poniżej rozpatrzmy wynik nakładania się fal w wybranym, ustalonym punkcie przestrzeni. Dla uproszczenia założmy, że obydwie fale mają takie same amplitudy:

$$y_1 = A \cos \omega_1 t, \quad (2.22)$$

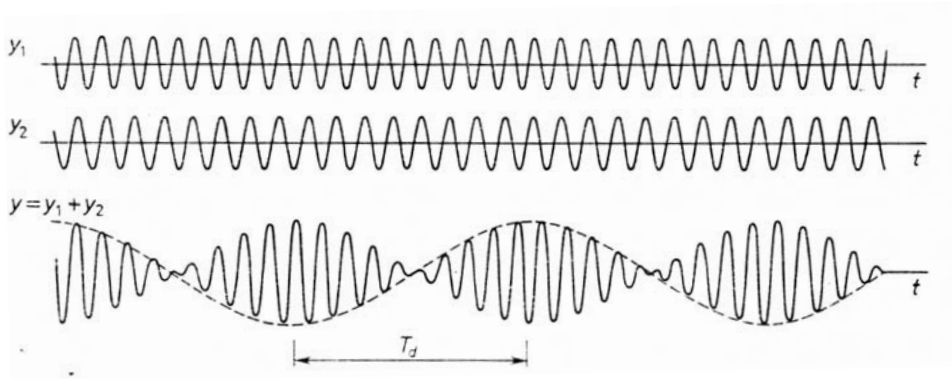
$$y_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (2.23)$$

Na mocy zasady superpozycji możemy zapisać, że

$$y = y_1 + y_2 = A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \quad (2.24)$$

Korzystając ze związku (2.4) oraz z zależności pomiędzy częstotliwością kołową drgań a ich częstotliwością, $\omega = 2\pi\nu$, powyższą równość możemy zapisać w postaci

$$y = B \cos \left[2\pi \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) t \right], \quad (2.25)$$



Rysunek 2.6:

w której wielkość B , dana wzorem

$$B = 2A \cos \left(2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \right) \quad (2.26)$$

ma sens amplitudy drgań wypadkowych. Ich częstotliwość określona jest wyrażeniem

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \quad (2.27)$$

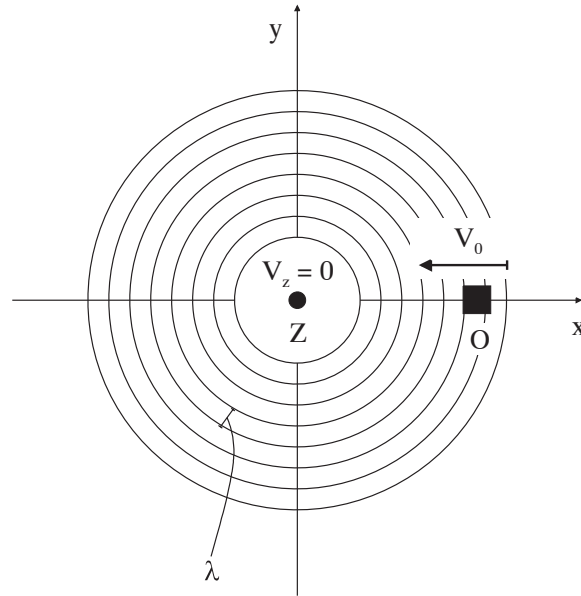
i jest średnią częstotścią dwóch fal. Ze wzoru (2.26) wynika, że amplituda drgań wypadkowych zmienia się kosinusoidalnie w czasie, z częstotliwością daną wzorem

$$\nu_{amp} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \quad (2.28)$$

oraz że osiąga ona maksimum — zwane *dudnieniami* — gdy

$$\cos \left[2\pi \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \right) \right] = \pm 1. \quad (2.29)$$

Ponieważ każda z tych wartości pojawia się jeden raz w czasie jednego okresu, liczba dudnień równa się podwojonej częstotliwości ν_{amp} na sekundę, czyli różnicy częstotliwości fal składowych $\nu_1 - \nu_2$. Jeżeli ν_1 i ν_2 są prawie równe, wartość ν_{amp} jest mała i amplituda zmienia się powoli. Zjawisko dudnień dwóch fal o mało różniących się częstotliwościami ($\nu_1/\nu_2 = 1.11$) ilustruje rys. 2.6.



Rysunek 2.7:

2.6.6 Efekt Dopplera.

Jeżeli źródło fal porusza się względem obserwatora lub też obserwator względem źródła fal, obserwator odbiera fale o częstotliwości różnej od częstotliwości drgań źródła. Zjawisko to nazywa się *efektem Dopplera*. Z tego powodu np. ton gwizdka lokomotywy jest wyższy w czasie jej zbliżania się do obserwatora niż wtedy, gdy lokomotywa oddala się od niego.

Załóżmy, że obserwator „O” porusza się z prędkością v_0 wzdłuż linii prostej w kierunku nieruchomego źródła fal, np. dźwiękowych „Z” (ze źródłem związany jest nasz układ współrzędnych) — rys. 2.7. Okręgi na rysunku przedstawiają oddalone od siebie o długość fali λ powierzchnie falowe, rozchodzące się w ośrodku. Obserwator spoczywający względem źródła w czasie t odebrałby vt/λ fal (v jest prędkością rozchodzenia się fal w ośrodku). Ponieważ obserwator porusza się w kierunku źródła, odbiera on w tym samym czasie t v_0t/λ dodatkowych fal. Zatem częstość ν' fali dźwiękowej odbieranej przez obserwatora — określona przez całkowitą liczbę fal odbieranych w jednostce czasu — wynosi

$$\nu' = \frac{(vt/\lambda) + (v_0t/\lambda)}{t} = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{v + v_0}{v/\nu}. \quad (2.30)$$

Oznacza to, że częstota ν' odbierana przez obserwatora jest równa częstoci ν słyszanej w spoczynku, powiększonej o wartość wyrazu $\nu v_0/v$, związanego z ruchem obserwatora

$$\nu' = \nu \frac{v + v_0}{v} = \nu \left(1 + \frac{v_0}{v} \right). \quad (2.31)$$

Gdy obserwator oddala się od tego samego źródła, odbierana przez niego częstota jest mniejsza o wartość wyrazu $\nu v_0/v$

$$\nu' = \nu \frac{v - v_0}{v} = \nu \left(1 - \frac{v_0}{v} \right). \quad (2.32)$$

Jest to związane ze zmniejszeniem się liczby fal docierających do niego w jednostce czasu. Ogólnie, gdy obserwator porusza się względem nieruchomego źródła, wzory (2.31) i (2.32) możemy napisać w postaci

$$\boxed{\nu' = \nu \frac{v \pm v_0}{v}}, \quad (2.33)$$

w której znak „+” odnosi się do ruchu w kierunku źródła, znak „-” do ruchu „od źródła”.

Rozpatrzmy sytuację, w której źródło fali dźwiękowej porusza się z prędkością v_z w kierunku nieruchomego obserwatora (z obserwatorem związany jest nasz układ współrzędnych) — rys. 2.8. Ponieważ źródło oraz emitowana przez nie fala zbliżają się do obserwatora, odległość pomiędzy powierzchniami falowymi ulega zmniejszeniu. W czasie jednego okresu drgań źródło przemieści się o odcinek v_z/ν i każda długość fali emitowanej przez źródło $\lambda = v/\nu$ zostanie skrócona o tę wielkość. Mamy zatem

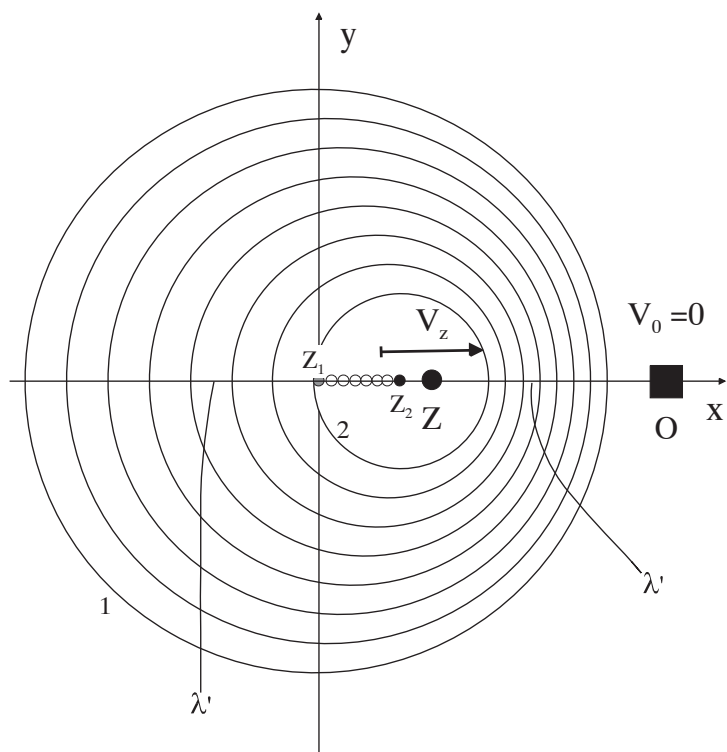
$$\lambda' = \frac{v}{\nu} - \frac{v_z}{\nu}. \quad (2.34)$$

Oznacza to, że częstota fali odbieranej przez obserwatora ulega zwiększeniu

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu \left(\frac{v}{v - v_z} \right). \quad (2.35)$$

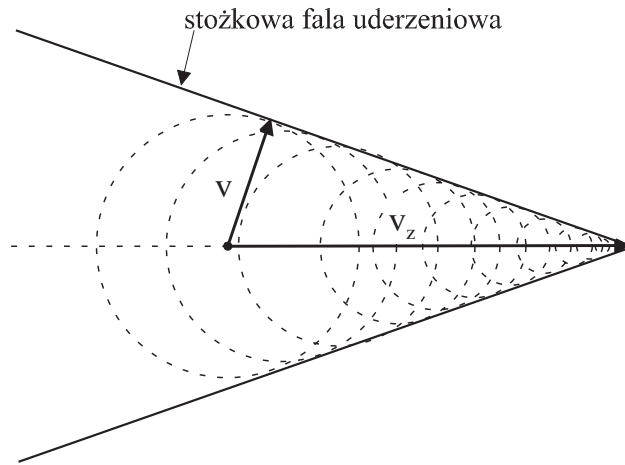
Gdy źródło oddala się od obserwatora, długość emitowanej fali jest o v_z/ν większa niż λ . Obserwator odbierze zatem falę o obniżonej częstotliwości

$$\nu' = \nu \left(\frac{v}{v + v_z} \right). \quad (2.36)$$



- 1 - fala wytworzona przez źródło w punkcie Z_1
- 2 - fala wytworzona przez źródło w punkcie Z_2

Rysunek 2.8:



Rysunek 2.9:

Ogólnie, gdy źródło fali porusza się względem nieruchomego obserwatora, na podstawie wzorów (2.35) i (2.36), mamy

$$\boxed{\nu' = \nu \left(\frac{v}{v \mp v_z} \right)}. \quad (2.37)$$

W powyższym wzorze znak „-” odnosi się do ruchu źródła w kierunku obserwatora, znak „+” do ruchu „od obserwatora”.

Jeżeli ciało porusza się w ośrodku z prędkością $v_z > v$ (v_z — prędkość źródła, v — prędkość rozchodzenia się fal w ośrodku), cząsteczki ośrodka tworzą falę w kształcie stożka, w którego wierzchołku znajduje się ciało (rys.2.9). Kąt przy wierzchołku stożka jest określony zależnością

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_z}. \quad (2.38)$$

Fala ta nosi nazwę *fali uderzeniowej* i jest charakterystyczna dla ruchu w atmosferze samolotów lub pocisków o prędkości większej niż prędkość dźwięku ($v_z > 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)