

Rysunek 2.1:

### 2.5.3 Drgania wymuszone. Rezonans

Jak stwierdziliśmy poprzednio, ciało poddane działaniu siły wprost proporcjonalnej do jego wychylenia z położenia równowagi i przeciwnie skierowanej, np. wahadło matematyczne — wykonuje drgania harmoniczne z określoną częstotliwością własną  $\omega_0$ . W przypadku występowania sił oporu ośrodka drgania zanikają wykładniczo w czasie, zgodnie z funkcją  $e^{-\beta t}$ , przy czym ich częstotliwość jest nieco mniejsza od częstotliwości własnej,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Można jednak zmusić ten punkt do drgań z dowolną częstotliwością  $\Omega$ , jeśli poddamy go działaniu siły zmieniającej się harmonicznym w czasie z tą właśnie częstotliwością (rys.2.1). Takie drgania nazywamy *drganiami wymuszonymi*.

Niech siła wymuszająca  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ . Wówczas równanie różniczkowe drgań będzie miało postać (por. wzór (2.174))

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t). \quad (2.1)$$

Stosując znane już oznaczenia:  $\sqrt{k/m} = \omega_0$ ,  $\beta = b/2m$  oraz wprowadzając dodatkowo

$$\boxed{B = F_0/m}, \quad (2.2)$$

otrzymujemy

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = B \cos(\Omega t). \quad (2.3)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$\boxed{x = A \cos(\Omega t - \varphi_w)}, \quad (2.4)$$

w której amplituda drgań  $A$  dana jest wzorem

$$\boxed{A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}} \quad (2.5)$$

zaś faza  $\varphi_w$  wyrażeniem

$$\varphi_w = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (2.6)$$

O tym, że związek (2.4) jest rozwiązaniem równania różniczkowego opisującego drgania, można się przekonać obliczając pochodne  $\frac{dx}{dt}$  i  $\frac{d^2x}{dt^2}$  podstawiając otrzymane wyrażenia do wzoru (2.3) — podobne rachunki przeprowadziliśmy już poprzednio i dlatego nie będziemy ich szczegółowo przytaczać.

Ze wzoru (2.5) wynika bardzo istotny wniosek: *amplituda drgań wymuszonych zależy od ich częstotliwości, tj. od częstotliwości siły wymuszającej  $\Omega$ . W szczególności, gdy  $\Omega = 0$ , czyli w przypadku stałej siły wymuszającej  $F_0$  amplituda drgań przechodzi w wychylenie statyczne*

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_{st}. \quad (2.7)$$

Z kolei przy wzroście  $\Omega$  i *niewielkich oporach ruchu, tzn. małym  $\beta$*  następuje wyraźny wzrost amplitudy, która przy pewnej częstotliwości  $\Omega_r$  osiąga maksimum. Zjawisko to nazywamy *rezonansem*, a  $\Omega_r$  — *częstotliwością rezonansową*. Z zależności (2.5) widać również, że maksimum amplitudy odpowiada

minimum mianownika. Różniczkując względem  $\Omega$  funkcję pod pierwiastkiem wzoru (2.5) i przyrównując otrzymaną pochodną do zera mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right] &= 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\beta^2 \Omega \\ &= 4\Omega^3 - 4\omega_0^2 \Omega + 8\beta^2 \Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

czyli

$$4\Omega \left[ \Omega^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2) \right] = 0. \quad (2.9)$$

Powyższa równość będzie spełniona o ile wyrażenie w nawiasach kwadratowych będzie równe zero. Oznacza to, że amplituda drgań (2.5) osiąga maksimum dla częstotliwości  $\Omega = \Omega_r$ , danej wzorem

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}, \quad (2.10)$$

zwanej *częstotliwością rezonansową*. Jak wynika z powyższego wzoru, rezonans zachodzi przy częstotliwości nieco mniejszej niż częstość drgań własnych  $\omega_0$ . Podstawiając częstość rezonansową do wzoru na amplitudę (2.5), znajdujemy jej wartość w rezonansie

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} \\ &= \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^2(\beta^2 + \omega_0^2 - 2\beta^2)}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

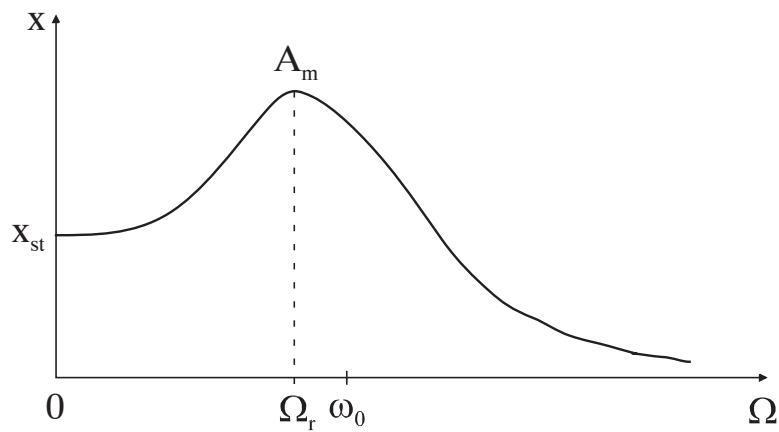
to jest

$$\boxed{A_m = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}. \quad (2.12)$$

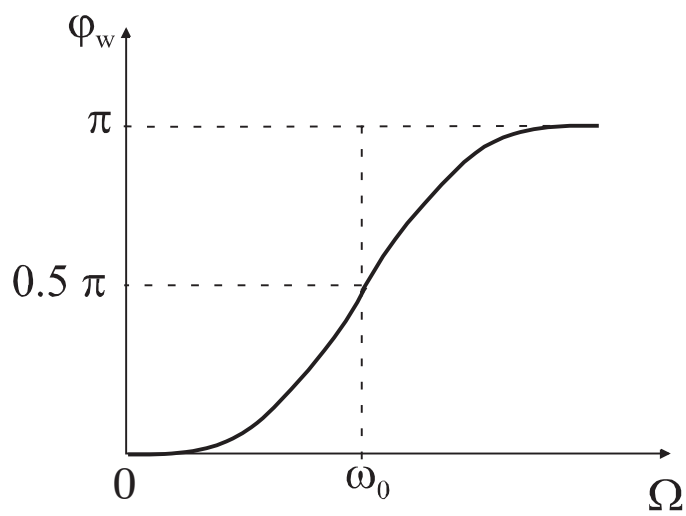
Przy dalszym wzroście częstotliwości amplituda drgań maleje, dążąc do zera przy  $\Omega \rightarrow \infty$ . Krzywa rezonansowa ma zatem postać jak na rysunku 2.2.

Jak wynika ze wzoru (2.4), drgania wymuszone są opóźnione w fazie o kąt  $\varphi_w$ . Różnicę faz określa wyrażenie (2.6); rośnie ona z częstotliwością od  $\varphi_w = 0$  dla  $\Omega = 0$  (przypadek statyczny) do  $\varphi_w = \pi$  dla  $\Omega \rightarrow \infty$ . Zauważmy jeszcze, że dla  $\Omega = \omega_0$  różnica faz równa jest  $\frac{1}{2}\pi$  (rys.2.3).

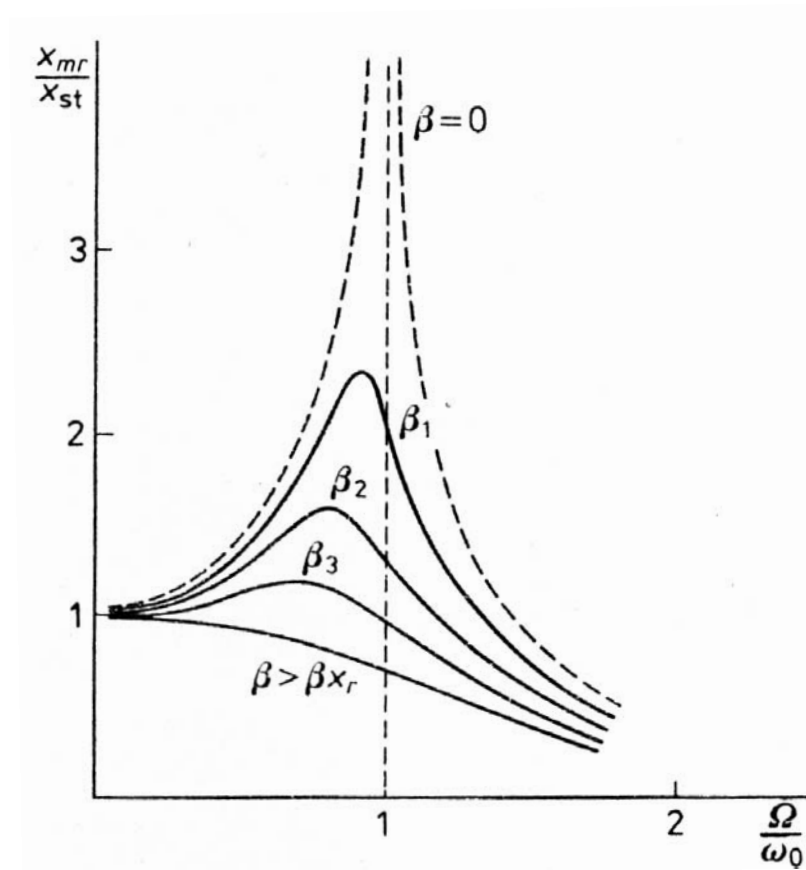
Przykładowe uniwersalne krzywe rezonansowe (tzn. krzywe, których amplitudy normalizowane są do wielkości wychylenia statycznego,  $x_{st}$ ), dla kilku wartości współczynnika  $\beta = 0, \beta_1 > \beta_2 > \beta_3$  oraz  $\beta > \beta_{kr}$  przedstawia



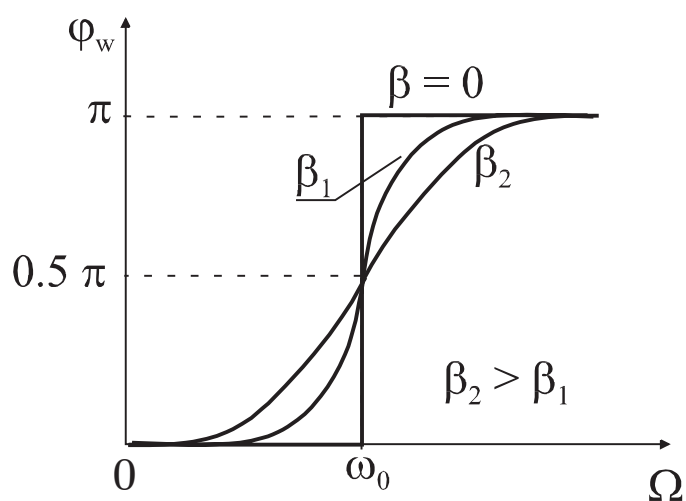
Rysunek 2.2:



Rysunek 2.3:



Rysunek 2.4:



Rysunek 2.5:

rys. 2.4. Jak widać, im większe  $\beta$ , tym słabszy rezonans. Dla  $\beta > \beta_{kr}$  rezonansu nie ma. Wykres ma znaczenie bardzo ogólne, gdyż zjawiska rezonansu o podobnym charakterze zachodzą również w akustyce, optyce i w dziedzinie fal radiowych.

Opory ruchu wpływają także na przebieg funkcji różnicy faz  $\varphi_w(\Omega)$ , który w miarę ich maleńia zbliża się do linii łamanej (rys. 2.5).

Zjawisko rezonansu może mieć często niebezpieczne konsekwencje. Przykładowo, przy niedostatecznym wyważeniu części wirujących maszyny powstające drgania mogą pokryć się z np. częstotliwością własną jej fundamentów. Wzbudzone drgania mogą powodować duże przeciążenie lub nawet zniszczenie elementów konstrukcyjnych.