

Niepewności pomiarowe

Obserwacja, doświadczenie, pomiar

Obserwacja zjawisk fizycznych polega na badaniu tych zjawisk w warunkach naturalnych oraz na analizie czynników i warunków, od których zjawiska te zależą. Warunki te mogą być zmienne, a czynników wpływających na przebieg zjawiska może być wiele. W celu ustalenia prawa rządzącego zjawiskiem konieczne jest zatem wykonywanie **doświadczenia**, czyli obserwacji zjawiska w warunkach stworzonych sztucznie, kontrolowanych przez badacza.

(Przykład: Chcemy wyznaczyć okres drgań wahadła utworzonego z kuli zawieszonej na nitce.

Obserwujemy, że wahadło wykonane z lekkiej piłeczki wychylone z położenia równowagi wykonuje tylko kilka wahaní o malejącej amplitudzie, podczas gdy wahadło utworzone z pełnej kulki stalowej o tej samej średnicy i zawieszonej na tej samej nici będzie wahać się przez czas stosunkowo długi. Z obserwacji tej można by wyciągnąć wniosek (lecz błędny) o zależności ruchu wahadła od własności ciała zawieszonego np. od jego masy.

Wystarczy jednak umieścić oba wahadła pod kloszem szklanym, który opróżnimy z powietrza, by przekonać się, że czynnikiem zakłócającym ruch wahadeł był opór powietrza, po jego wyeliminowaniu oba wahadła wykonują ruch drgający o niemalejącej amplitudzie i tym samym okresie). Analiza czynników i warunków wpływających na przebieg obserwowanego zjawiska jest szczególnie trudna gdy przedmiotem badań są materiały biologiczne, lub organizmy żywe.

Doświadczenia przeprowadza się w laboratorium posługując się przyrządami skonstruowanymi w oparciu o aktualny stan wiedzy. Za pomocą przyrządów dokonuje się pomiarów wielkości fizycznych. **Pomiar** wielkości fizycznej polega na porównaniu jej z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę. Zatem liczba otrzymana jako wynik pomiaru zależy od wyboru jednostki (przykład: pomiar długości w cm, m, ft, in itp.). **Wynik pomiaru musi więc zawsze składać się z dwóch części: wartości liczbowej oraz jednostki.**

Pomiary wielkości fizycznych dzielimy na bezpośrednie i pośrednie. **Pomiary bezpośrednie** są najprostsze – polegają wprost na porównaniu danej wielkości z odpowiednią miarą wzorcową np. pomiar wymiarów ciała za pomocą linijki, suwmiarki, śruby mikrometrycznej itp., pomiar czasu trwania jakiegoś procesu przy użyciu stopera, pomiar natężenia prądu amperomierzem. W przypadku **pomiarów pośrednich** wartość badanej wielkości wyznaczana jest na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości fizycznych, które są z nią związane znanym nam prawem fizycznym.

Przykład: Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego, na podstawie okresu drgań wahadła

matematycznego. Jak wiadomo okres drgań wahadła opisuje wzór: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, stąd $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Widzimy, że w celu wyznaczenia wartości g musimy dokonać pomiarów (bezpośrednich) okresu drgań wahadła (T) oraz długości nici (L). Innym przykładem jest wyznaczanie natężenia prądu

elektrycznego na podstawie pomiarów spadku napięcia na oporniku wzorcowym oraz prawa Ohma $I = U / R$.

Widzimy, że w zależności od wyboru metody pomiarowej, wartości niektórych wielkości fizycznych mogą być wyznaczane zarówno drogą pomiarów bezpośrednich, jak i pośrednich.

Niezależnie od metody pomiarów nie możemy nigdy bezwzględnie dokładnie wyznaczyć rzeczywistej wartości wielkości fizycznej. Różnicę pomiędzy wynikiem pomiaru, a rzeczywistą wartością mierzonej wielkości nazywamy **błędem pomiaru**. Błędy pomiarów tradycyjnie dzielimy na grube (omyłki), przypadkowe oraz systematyczne.

Błędy grube powstają zwykle na skutek nieuwagi lub niestaranności obserwatora przy odczytywaniu lub zapisywaniu wyników lub w wyniku nagłej zmiany warunków pomiaru (np. wstrząsy). Jeśli mamy serię pomiarów wyniki obciążone błędem grubym są łatwe do wykrycia i usunięcia.

Błędy systematyczne wynikają z niedoskonałości przyrządów i metod pomiarowych. Można je zredukować stosując bardziej doskonałe i precyzyjne metody i przyrządy, jednak całkowite wyeliminowanie błędów systematycznych jest niemożliwe. Rozpoznane błędy systematyczne należy uwzględnić poprzez wprowadzenie odpowiednich poprawek do wyniku, np. kiedy ważymy na wadze, której wskazanie bez obciążenia wynosi m_0 zamiast 0 to m_0 jest błędem systematycznym, który należy odjąć od wyniku ważenia, innym typowym przykładem jest poprawka na opór wewnętrzny woltomierza przy pomiarze napięcia.

Z **błędami przypadkowymi** mamy do czynienia zawsze. Wynikają one z różnych przypadkowych i nie dających się uwzględnić czynników (np. wahania temperatury, lub ruch powietrza w pobliżu przyrządu pomiarowego, czasem wielkość mierzoną charakteryzuje naturalny rozrzut (np. aktywność promieniotwórcza)). O istnieniu błędów przypadkowych świadczy niepowtarzalność wyników pomiaru jednej i tej samej wielkości. Błędy przypadkowe redukuje się poprzez wielokrotne powtarzanie pomiaru – zachodzi wówczas częściowa kompensacja przypadkowych zawyżających i zaniżających odchyłek wyniku.

Ponieważ nigdy nie znamy rzeczywistej wartości wielkości mierzonej, więc posługiwanie się w praktyce pojęciem błędu pomiaru nie jest wygodne. Obecnie przy opracowywaniu wyników pomiarów należy stosować się do zaleceń Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru. Norma ta uzgodniona w 1995 r. i przyjęta ustawowo w Polsce w 1999 r. znajduje zastosowanie w wielu różnych dziedzinach nauki i technologii.

Międzynarodowa Norma zaleca posługiwanie się terminem **niepewność pomiarowa** zdefiniowanym jako parametr charakteryzujący wątpliwości dotyczące wartości wyniku pomiarowego. Miarą niepewności pomiarowej jest **niepewność standardowa**, która może być szacowana na 2 sposoby: **typu A** wykorzystujący analizę statystyczną serii pomiarów oraz **typu B** oparty na naukowym osądzie obserwatora. Symbolem niepewności standardowej jest u (od ang. uncertainty), który można zapisywać na 3 różne sposoby, np. u , $u(x)$ lub $u(\text{stężenie NaCl})$. Zaletą tego

zapisu jest to, że informacja o wielkości mierzonej może być wyrażona słownie, co ułatwia tworzenie dokumentacji pomiaru. Należy jednak pamiętać, że u nie jest funkcją tylko liczbą!

Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

Przypuśćmy, że wykonaliśmy serię n pomiarów bezpośrednich wielkości fizycznej X otrzymując wyniki $X_1, X_2 \dots X_n$. Jeśli wyniki pomiarów nie są takie same, wówczas za najbardziej zbliżoną do wartości prawdziwej przyjmujemy średnią arytmetyczną ze wszystkich wyników pomiarów:

$$X \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

Stwierdzenie to jest tym bardziej słuszne im większa jest liczba przeprowadzonych pomiarów (dla $n \rightarrow \infty, \bar{X} \rightarrow X$). W celu określenia niepewności standardowej posługujemy się w tym wypadku sposobem typu A, czyli korzystamy ze wzoru na odchylenie standardowe średniej

$$u(X) = \sqrt{s_{\bar{X}}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} \quad (2)$$

Jeśli natomiast wyniki pomiarów nie wykazują rozrzutu, czyli $X_1 = X_2 = \dots = X_n$, lub też gdy istnieje tylko jeden wynik pomiaru, wówczas niepewność standardową szacujemy sposobem typu B. Można np. wykorzystać informację o niepewności maksymalnej ΔX określonej przez producenta przyrządu pomiarowego, jeśli nie mamy innych dodatkowych informacji, wówczas niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u(X) = \frac{\Delta X}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

Dla prostych przyrządów (tj. linijka, śruba mikrometryczna czy termometr) jako ΔX często można przyjąć działkę elementarną przyrządu (np. $\Delta l = 1 \text{ mm}$ dla pomiaru długości za pomocą linijki). W wielu wypadkach eksperymentator ustala wielkość niepewności maksymalnej kierując się własnym osądem.

Przykłady:

1. Dla pomiaru czasu za pomocą stopera przyjmuje się $\Delta t = 0,2 \text{ s}$, chociaż działka elementarna dla tego przyrządu to 0.01 s . Jest to związane z czasem reakcji człowieka włączającego i wyłączającego stoper
2. Przy pomiarze długości stołu za pomocą linijki o długości 50 cm niepewność maksymalna będzie z pewnością większa niż 1 mm (elementarna działka przyrządu), ze względu na konieczność kilkakrotnego przykładania miarki.

3. W elektronicznych przyrządach cyfrowych niepewność maksymalna podawana jest przez producenta w instrukcji obsługi i jest zwykle kilkakrotnie większa od działki elementarnej. Najczęściej zależy ona od wielkości mierzonej X i zakresu na którym mierzymy Z :

$$\Delta X = c_1 X + c_2 Z$$

Gdy występują oba typy niepewności (tzn. zarówno rozrzut wyników jak i niepewność wzorcowania) i żadna z nich nie może być zaniedbana (tzn. obie są tego samego rzędu), wówczas niepewność standardową (całkowitą) obliczamy ze wzoru

$$u(X) = \sqrt{s_X^2 + \frac{(\Delta X)^2}{3}}. \quad (4)$$

Niepewność standardowa pomiarów pośrednich – niepewność złożona (u_c)

W przypadku pomiarów pośrednich wielkość mierzona Y obliczamy korzystając ze związku funkcyjnego, który można zapisać w ogólnej postaci: $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$, gdzie symbolami $X_1, X_2, \dots, X_k$ oznaczamy k wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio. Zakładamy, że znane są wyniki pomiarów tych wielkości $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ oraz ich niepewności standardowe $u(X_1), u(X_2), \dots, u(X_k)$. Wynik (końcowy) pomiaru oblicza się wówczas ze wzoru:

$$Y \approx \bar{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)$$

W przypadku pomiarów pośrednich nieskorelowanych (tzn. gdy każdą z wielkości $X_1, X_2, \dots, X_k$ mierzy się niezależnie) niepewność złożoną wielkości Y szacujemy przy pomocy przybliżonego wzoru:

$$u_c(Y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial f}{\partial X_j}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \right]^2 u^2(\bar{X}_j)}. \quad (5)$$

Niepewność rozszerzona

Niepewność standardowa całkowicie i jednoznacznie określa wartość wyniku, jednak do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z innymi rezultatami (np. z wartością tabelaryczną) oraz dla celów komercyjnych i do ustalania norm przemysłowych, zdrowia, bezpieczeństwa itp. Międzynarodowa Norma wprowadza pojęcie **niepewności rozszerzonej** oznaczanej symbolem U (dla pomiarów bezpośrednich), lub U_c (dla pomiarów pośrednich). Wartość niepewności rozszerzonej oblicza się ze wzoru

$$U(X) = ku(X) \text{ lub } U_c(X) = ku_c(X). \quad (6)$$

Liczba k , zwana współczynnikiem rozszerzenia, jest umownie przyjętą liczbą wybraną tak, aby w przedziale $X \pm U(X)$ znalazła się **większość** wyników pomiaru potrzebna dla danych zastosowań. Wartość współczynnika rozszerzenia mieści się najczęściej w przedziale 2-3. W większości zastosowań zaleca się przyjmowanie umownej wartości $k = 2$.

Zapis wyników pomiaru

Wyniki pomiaru zapisujemy zawsze łącznie z niepewnością i jednostką. Niepewność podajemy zawsze z dokładnością do **dwu cyfr**, zaś liczbę cyfr znaczących wyniku dobieramy tak, aby **ostatnia cyfra rezultatu i niepewności należały do tego samego rzędu**. Dla niepewności standardowych zalecany jest **zapis z użyciem nawiasów**, zaś dla niepewności rozszerzonej stosowany jest **zapis z użyciem symbolu $\pm$** .

Przykłady zapisu

Dobrze:

Niepewność standardowa:

$$m = 100,0214 \text{ g}, u(m) = 3,5 \text{ mg}$$

$$m = 100,0214(35) \text{ g}$$

$$m = 100,0214(0,0035) \text{ g}$$

Niepewność rozszerzona:

$$m = 100,0214 \text{ g}, U(m) = 0,0070 \text{ g}$$

$$m = (100,0214 \pm 0,0070) \text{ g}$$

Źle:

$m = 100,0214 \text{ g}$ – nie podano niepewności,

$m = 100,021(0,0035) \text{ g}$ – ostatnie cyfry rezultatu i niepewności nie są tego samego rzędu,

$m = 100,021 \text{ g}, u(m) = 3 \text{ mg}$ – przy zapisie niepewności podano zbyt mało cyfr,

$m = 100,02147(0,00352) \text{ g}$ – przy zapisie niepewności podano zbyt dużo cyfr.

Przykład opracowania wyników pomiaru

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego przeprowadzono pomiary czasu spadku ciała z pewnej wysokości. Wysokość spadku h zmierzono 3-krotnie taśmą mierniczą z podziałką milimetrową uzyskując za każdym razem wynik 1270 mm. Czas spadku t zmierzono 5 razy otrzymując następujące wyniki (w s) $t_1 = 0,509$, $t_2 = 0,512$, $t_3 = 0,510$, $t_4 = 0,504$, $t_5 = 0,501$. Dokładność czasomierza wynosiła 0,001 s, zaś niepewność systematyczną związaną z wyborem chwili włączenia i wyłączenia oszacowano na 0,01 s. Obliczyć z tych danych przyspieszenie ziemskie i jego niepewność.

Przyspieszenie ziemskie będziemy obliczać ze wzoru $g = \frac{2h}{t^2}$. Wartość $\bar{g}$ otrzymamy wstawiając do

powyższego równania średnie arytmetyczne wysokości spadku ($\bar{h}$) oraz czasu spadku ($\bar{t}$) (wzór (1)). Dla danych z tego przykładu mamy:

$$\bar{h} = 1270 \text{ mm} = 1,27 \text{ m}, \quad \bar{t} = \frac{1}{5}(0,509 + 0,512 + 0,510 + 0,504 + 0,501) \text{ s} = 0,5072 \text{ s},$$

$$\text{stąd} \quad \bar{g} = \frac{2 \cdot 1,27 \text{ m}}{(0,5072 \text{ s})^2} \approx 9,874 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aby obliczyć niepewność złożoną pomiaru pośredniego g musimy najpierw określić niepewności standardowe pomiaru czasu i wysokości.

Oszacowanie niepewności standardowej (bezpośredniego) pomiaru czasu $u(t)$:

Ocena typu A: Korzystając ze wzoru (2) oraz z tabeli obliczamy odchylenie standardowe średniej $\bar{t}$:

Nr pomiaru	t_i [s]	$ \bar{t} - t_i $ [ms]	$ \bar{t} - t_i ^2$ [ms ²]
1	0,509	1,8	3,24
2	0,512	4,8	23,04
3	0,510	2,8	7,84
4	0,504	3,2	10,24
5	0,501	6,2	38,44
			Suma: 82,80

$$\sqrt{s_t^2} = \sqrt{\frac{82,80 \text{ ms}^2}{5 \cdot 4}} = \sqrt{4,14} \text{ ms} = 2,0 \text{ ms}$$

Ocena typu B: Możemy przyjąć, że niepewność maksymalna związana z pomiarem czasu wynika przede wszystkim z niepewności chwili włączenia i wyłączenia, a zatem wynosi $\Delta t = 0,01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$ (zaniedbujemy przy tym 10-krotnie mniejszą niepewność związaną z dokładnością czasomierza). Niepewność standardowa typu B wynosi zatem $\frac{\Delta t}{\sqrt{3}} = 5,8 \text{ ms}$ (wzór (3)). Jak widać

w tym wypadku należy uwzględnić oba typy niepewności standardowych (ponieważ są one tego samego rzędu). Ostatecznie więc całkowita niepewność standardowa pomiaru czasu wynosi (wzór (4)):

$$u(t) = \sqrt{(2,0^2 + 5,8^2) \text{ ms}^2} \approx 6,1 \text{ ms} = 0,0061 \text{ s}.$$

Końcowy wynik pomiaru czasu można zapisać w postaci: $t = 0,5072(0,0061) \text{ s}$.

Oszacowanie niepewności standardowej (bezpośredniego) pomiaru wysokości $u(h)$:

Ponieważ w tym wypadku nie wystąpił rozrzut wyników więc poprzestaniemy na określeniu niepewności standardowej typu B. Najmniejsza działka przyrządu pomiarowego wynosi w tym wypadku 1 mm. Ponieważ jednak pewien wpływ na wynik pomiaru może mieć również sposób ustawienia miarki oraz sposób odczytu, rozsądnie będzie przyjąć, że niepewność maksymalna tego pomiaru jest większa od działki elementarnej np. dwukrotnie: $\Delta h = 2 \text{ mm}$.

Zgodnie ze wzorem (3), niepewność standardowa pomiaru wysokości wynosi zatem:

$$u(h) = \Delta h / \sqrt{3} = 1,2 \text{ mm} = 0,0012 \text{ m}, \text{ a więc } h = 1270,0(1,2) \text{ mm}.$$

Oszacowanie niepewności złożonej pomiaru pośredniego $u_c(g)$:

Korzystamy ze wzoru (5). Obliczymy najpierw pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial g}{\partial h}(\bar{t}, \bar{h}) = \frac{2}{\bar{t}^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}, \bar{h}) = \frac{4\bar{h}}{\bar{t}^3}. \text{ Aby niepewność } u_c(g) \text{ wyrażona była w m/s}^2, \text{ przy podstawianiu}$$

danych do wzoru (5) musimy pamiętać o uzgodnieniu jednostek ($\bar{t}$ i $u(t)$ należy wyrazić w s, zaś $\bar{h}$ i $u(h)$ należy wyrazić w m).

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{t}^2}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{4\bar{h}}{\bar{t}^3}\right)^2 u^2(t)} = \sqrt{\left[\frac{2}{(0,507 \text{ s})^2} \cdot 0,0012 \text{ m}\right]^2 + \left[\frac{4 \cdot 1,2700 \text{ m}}{(0,507 \text{ s})^3} \cdot 0,0061 \text{ s}\right]^2}$$

$$u_c(g) \approx \sqrt{(8,7 \cdot 10^{-5} + 0,057) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}} \approx \sqrt{0,057 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}} \approx 0,24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Jak widać, przyczynek do niepewności złożonej $u_c(g)$ związany z niepewnością pomiaru wysokości okazał się zanedbywalnie mały.

Obliczenie niepewności rozszerzonej $U_c(g)$:

$$\text{Podstawiając dane do wzoru (6) otrzymujemy: } U_c(g) = 2u_c(g) = 2 \cdot 0,24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ostatecznie końcowy rezultat pomiaru przyspieszenia ziemskiego, który możemy porównywać z wielkością tablicową, wygląda następująco:

$$\mathbf{g = (9,87 \pm 0,48) m/s^2}$$