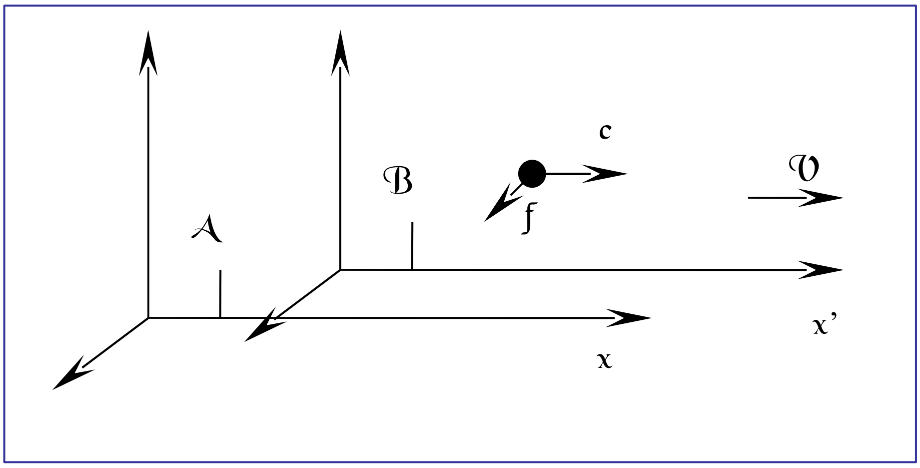
Mechanika Relatywistyczna

II prawo dynamiki Newtona

$$f = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Z punktu widzenia STW prawa tego nie da się utrzymać.



Mamy dwóch obserwatorów, którzy obserwują punkt materialny poruszający się i na który działa siła.
Siła zmienia się powodując zmianę trajektorii ruchu. Na podstawie obserwacji chcą oszacować siłę. Obaj mierzą długości i czas. Każdy z nich inaczej oszacuje drogę i czas. Dostajemy więc:

$$f = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

nie da się oszacować klasycznie.
Musimy dokonać pewnego założenia. A mianowicie, że masa zależy od prędkości. Założenie to jest konieczne z punktu zasady zachowania pędu.

$$m = m(v)$$

Dopuszczenie tej zależności kompensuje różne oceny przyrostu pędu. Żądamy by masa tak się zmieniała by to prawo było zachowawcze i spełniało postulaty teorii względności. Z.Z.P jest spełniona wtedy, gdy

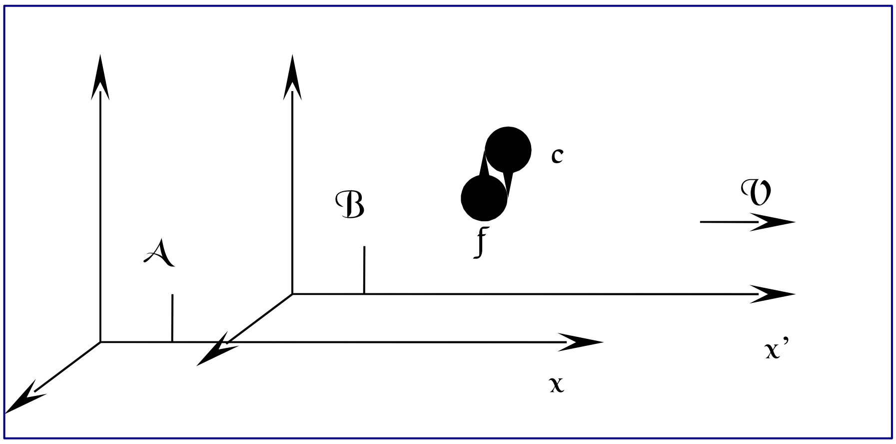
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

i

$$m = m(v)$$

Poszukamy zależności miary od prędkości.

Rozważmy zderzenie 2 kul.
Obowiązuje tu Z.Z.P. i Z.Z.E.
Kule się zderzają, poruszają się po jednej osi (y). Prędkości takie same U.



	Obserwator	Układ S	Układ S'
Przed zderzeniem	A	$u_x = 0\,,\ u_y = -u$	$u'_x = v\,,\ u'_y = -u\sqrt{1-\beta^2}$
	B	$u_x = v\,,\ u_y = u\sqrt{1-\beta^2}$	$u'_x = 0\,,\ u'_y = u$
Po zderzeniu	A	$u_x = 0\,,\ u_y = u$	$u'_x = v\,,\ u'_y = u\sqrt{1-\beta^2}$
	B	$u_x = v\,,\ u_y = -u\sqrt{1-\beta^2}$	$u'_x = 0\,,\ u'_y = -u$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x} = u\sqrt{1-\beta^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x} = u\sqrt{1-\beta^2}$$

Transformujemy do układu promowanego. Mamy wszystko w układzie promowanym i możemy zastosować Z.Z.P. czyli treść zasady, którą formułuje obserwator B.

$$p = mv \qquad\qquad f = \frac{dp}{dt}$$

$$\vec{p}(a) + \vec{p}(b) = \vec{p}(a) + \vec{p}(b)$$

$$p_{x_a} + p_{x_b} = p_{x_a} + p_{x_b}$$

dopuszczamy, że

$m = m(v)$ więc $p = m(v)\cdot v$

$$m(v) = m\left(\sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}\right)$$

$$m\left(\sqrt{v^2 + u^2(1-\beta^2)}\right)(-v) + m\left(\sqrt{u^2}\right)\cdot 0 = m\left(\sqrt{v^2 + u^2(1-\beta^2)}\right)(-v) + 0$$

$$m_x = m$$

dla składowej y

$$m\left(\sqrt{v^2+u^2(1-\beta^2)}\right)\left(-u\sqrt{1-\beta^2}\right)+m\left(\sqrt{u^2}\right)\cdot u=m\left(\sqrt{v^2+u^2(1-\beta^2)}\right)\left(u\sqrt{1-\beta^2}\right)+m\left(\sqrt{u^2}\right)\cdot(-u)$$

$$2m\left(\sqrt{v^2+u^2(1-\beta^2)}\right)\cdot u\sqrt{1-\beta^2}=2m\sqrt{u^2}u$$

dla $u\to 0$ bo to się ma stosować do każdej prędkości, z.z.p. jest spełniona dla każdego wtedy

$$m(0)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

wniosek:

jeśli dopuścimy taką zależność masy od prędkości to prawo $f=\frac{dp}{dt}$ ma także sens z punktu widzenia teorii względności.

Spróbujemy zachować prawo $f=m(a)$

Wychodzimy z równania:

$$f=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}mv=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]=$$

$$=m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{(-1)\cdot(-2\beta)\frac{1}{c}\frac{d\vec{v}}{dt}}{2\cdot(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2}}\right]=m_0\left[\frac{a}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{a\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=m_0\left[\frac{a(1-\beta^2)+a\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=$$

$$=m_0a\left[\frac{1-\beta^2+\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=m_0a_{II}\frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

to wynik gdy siła działa w kierunku równoległym do ruchu (wzdłuż).

Jak wygląda to równanie gdy siła działa prostopadle.

$$f=m_0\left[\frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]=m_0\frac{a_\perp}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$f_{II}=\frac{m_0a_{II}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow m_{II}=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_\perp=\frac{m_0a_\perp}{\sqrt{1-\beta^2}}\Rightarrow m_\perp=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Wniosek:
Jeśli chcemy zachować prawo mechaniki zawierające przyspieszenie; i aby było relatywistyczne, niezmiennicze, obowiązujące w każdym układzie inercjalnym, to musimy odróżnić masy: równoległą i prostopadłą, w zależności czy siła działa w kierunku prostopadłym czy w kierunku ruchu.

Konsekwencje
Relatywistyczna definicja E_k

W relatywistce dysponujemy trzema masami: spoczynkową, równoległą i prostopadłą. Modyfikacji ulegają wszystkie prawa zawierające masę.

$$E_k = \int_{v=0}^{v} d\vec{s} \cdot \vec{f} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{s} = \int \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \vec{v} dt =$$

$$= m_0 \int \vec{v} dt \left[\frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\vec{v}(-1)\cdot(-2\beta)\frac{1}{c}\frac{dv}{dt}}{2(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2}} \right] = m_0 \int \vec{v} dt \left[\frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^2 \frac{dv}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \left| \begin{array}{l} \cdot c \\ \cdot c \end{array} \right.$$

$$= m_0 \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2} \cdot c} \cdot vc \frac{dv}{dt} + \frac{v\beta^2 c \frac{dv}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}} \cdot c} \right] dt = m_0 \int \left[\frac{vc}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{c}\right) + \frac{vc\beta^2 \frac{dv}{dtc}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dt =$$

$$= m_0 c^2 \int \left[\frac{\beta \frac{d\beta}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^3 \frac{d\beta}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dt = m_0 c^2 \int \left[\frac{\beta(1-\beta^2)\frac{d\beta}{dt} + \beta^3 \frac{d\beta}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dt =$$

$$= m_0 c^2 \int \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\beta}{dt} dt = m_0 c^2 \int \frac{\beta d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Big|_{p=0}^{p} = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

Dla małych prędkości

$$E_k = m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots - 1) = \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} mv^2$$

Einstein wysnuł wniosek, że to suma dwóch wyrażeń

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = T - T_0$$

T_0 - to energia spoczynkowa niezależna od ruchu. Czyli w wyrażeniu na energię, od energii całkowitej odejmujemy coś, co nie jest związane z ruchem.

Więc

$$E = mc^2$$

Energia i masa są ze sobą ściśle związane i nie można tych wyrażeń oddzielić. Nie można mówić o energii nie mówiąc o masie, przecież

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Wniosek: masie pędowej musimy przyporządkować energię i na odwrót. Jeśli mamy energię to musimy jej przyporządkować masę.

1. defekt masy
2. nie ma dwóch zasad zachowania (z.z.p, i z.z.e.) z.z relatywistce: relatywistce klasycznym ujęciu dwie
3. siła grawitacyjna
4. sprężyna