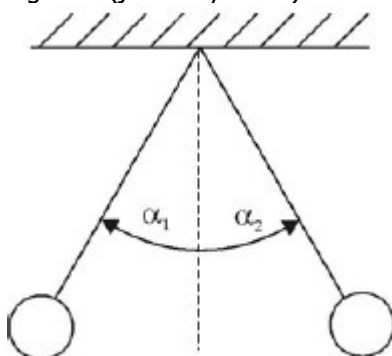


Elektryczność i magnetyzm

Pole elektryczne, kondensatory, przewodniki i dielektryki.

Zadanie 1.

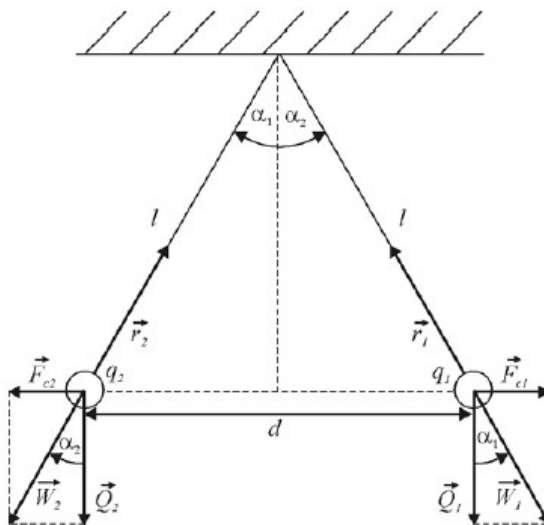
Dwie niewielkie, przewodzące kulki o masach równych odpowiednio m_1 i m_2 naładowane ładunkami q_1 i q_2 zawieszone są na równych niciach o długości l (jak na rysunku).



(a) Jakie warunki muszą spełniać masy m_1 i m_2 oraz ładunki aby kąty odchylenia nici od pionu spełniały warunek: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$?

(b) Oblicz sumaryczny ładunek obu kulek, jeżeli po naładowaniu kąt między nimi wynosi 90° przy założeniu, że rozmiary i masy obu kulek są równe: $m_1 = m_2 = m = 0,1$ g długości nici: $l = 10$ cm, a kulki przed naładowaniem stykały się ze sobą.

Rozwiązanie



(a) Jednoimiennie naładowane kulki odpychają się siłami $F_{c1} = F_{c2} = F_c$ (zgodnie z III zasadą dynamiki).

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{F_e}{Q_1} = \frac{F_e}{m_1 g} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{F_e}{Q_2} = \frac{F_e}{m_2 g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\alpha_1 = \alpha_2$ wtedy,
gdy $m_1 = m_2 = m$.
Ładunki q_1 i q_2 mogą być
różne.

(b) Ponieważ kąt $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha = 90^\circ$, więc kąt $\alpha = 45^\circ$, stąd:

(1)

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^\circ = 1$$

(2)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_e}{Q} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}}{mg} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mgd^2}$$

Ładunki obu kulek są równe: $q_1 = q_2 = q$, bo kulki mają te same rozmiary, są przewodzące, oraz stykały się ze sobą przed naładowaniem.

Z równań (1) i (2) otrzymujemy:

(3)

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 mgd^2$$

Ponieważ

$$d = \sqrt{2} \cdot l$$

(przekątna kwadratu), więc równanie (3) możemy zapisać w postaci:

$$q = 2l\sqrt{2\pi\epsilon_0 mg} = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Sumaryczny ładunek obu kulek q_c równa się:

$$q_c = 2q = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Zadanie 2.

Dwie niewielkie, przewodzące kulki o jednakowych rozmiarach i ciężarach: $G = 0,05 \text{ N}$ zawieszono na równych niciach o długościach: $l = 10 \text{ cm}$ tak, że powierzchnie stykały się. Jakim ładunkiem q_c należy naładować kulki aby naprężenie nici N wynosiło $0,1 \text{ N}$?

Rozwiązanie

$$q_c = 2q = 2 \frac{(N^2 - G^2)^{\frac{3}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}} \frac{2l}{N} \approx 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Wskazówka: Patrz rozwiązanie zad. 14.1. Skorzystaj z podobieństwa trójkątów sił i odległości oraz prawa Pitagorasa.

Zadanie 3.

Czy dwa rozciągle, przewodzące ciała naładowane ładunkami jednoimiennymi, będą zawsze się odpychały?

Rozwiązanie

Nie. W przypadku przewodzących ciał rozciąglonych, gdy ładunek jednego z ciał będzie znacznie większy od ładunku drugiego ciała, efekt indukcji elektrostatycznej (rozdzielenia ładunków w przewodniku pod wpływem pola elektrostatycznego) może być silniejszy i naładowane jednoimiennie ciała będą się przyciągały!

Zadanie 4.

Jak należy rozdzielić ładunek Q na dwie kulki, aby siła wzajemnego oddziaływania między kulkami była największa? Oblicz wartość tej siły.

Rozwiązanie

$$q_1 = q_2 = \frac{Q}{2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z warunku ekstremum siły coulombowskiej.

Zadanie 5.

Jaś zrobił sobie smalec ze skwarkami i stopiony, jeszcze przed waniem do słoiczka, posolił. Niestety sól nie rozpuściła się w tłuszczu i opadła na dno patelni. Spróbuj wyjaśnić Jasiowi dlaczego tak się stało.

Rozwiązanie

W soli występuje wiązanie jonowe. Zgodnie z prawem Coulomba, siła oddziaływania dwóch ładunków F_c równa się:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1q_2}{r^2}$$

Dla tłuszczu $\epsilon_r = 2$, w przeciwieństwie do wody, dla której $\epsilon_r = 81$, dlatego też w wodzie następuje rozpuszczanie się soli, a w tłuszczu nie. Jest to interpretacja jakościowa. W ciele stałym o wiązaniu jonowym występują bardziej złożone oddziaływania.

Zadanie 6.

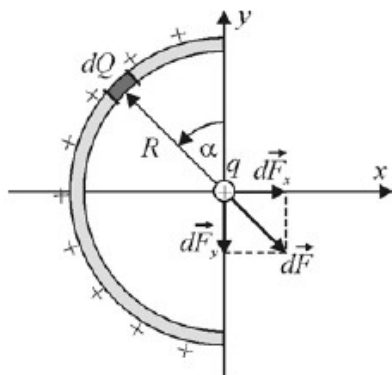
Czy można bezpośrednio posłużyć się prawem Coulomba w celu obliczenia siły, z jaką przyciągają się okładki naładowanego kondensatora?

Rozwiązanie

Nie. Prawo Coulomba stosuje się ściśle tylko do ładunków punktowych. W przypadku przewodzących ciał rozciągniętych, rzeczywiste oddziaływanie może różnić się nie tylko co do wartości, ale też co do znaku siły. Patrz przykład 14.3.

Zadanie 7.

Oblicz siłę działającą na punktowy ładunek $q = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, znajdujący się w środku równomiernie naładowanego ładunkiem $Q = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ półokręgu o promieniu $R = 5 \text{ cm}$.

Rozwiązanie

Korzystamy z zasady superpozycji oddziaływań. Na długości dl półokręgu znajduje się ładunek punktowy dQ :

$$(1) \quad dQ = \frac{Q}{\pi R} dl,$$

gdzie dl – element długości półokręgu.

Ładunek q w środku półokręgu doznaje oddziaływania od tego punktowego ładunku:

$$(2) \quad dF = k \frac{q \cdot dQ}{R^2}.$$

Siłę dF możemy rozłożyć na dwie składowe: dF_x i dF_y . Składowe siły dF_y pochodzące od punktów położonych symetrycznie względem osi x będą się kompensowały. Dlatego też wypadkowa siła F będzie skierowana wzdłuż osi x i pochodzić będzie od składowych siły dF_x .

$$F = F_x = \int dF_x = \int_0^\pi dF \cdot \sin \alpha$$

Podstawiając za dl : $dl = R \cdot d\alpha$ we wzorze (1) i (2) otrzymamy:

$$F = \int_0^\pi k \frac{q \frac{Q}{\pi R} R \sin \alpha}{R^2} d\alpha = \frac{2k \cdot q \cdot Q}{\pi R^2} = 3,42 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Zadanie 8.

Cztery jednakowe ładunki Q umieszczono w wierzchołkach kwadratu. Gdzie i jaki ładunek q należy umieścić, aby układ znalazł się w równowadze? W jakiej równowadze znajdują się ładunki?

Rozwiązanie

Układ znajduje się w równowadze, gdy w środku kwadratu umieścimy ładunek:

$$q = -\frac{Q}{4}(1 + 2\sqrt{2})$$

Będzie to równowaga chwiejna. Najmniejsze zakłócenie równowagi powoduje, że układ nie będzie już w równowadze.

Zadanie 9.

Pole elektryczne jest wytwarzane przez trzy ładunki Q , $2Q$ i $-3Q$, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a . Oblicz potencjał w środku odcinka łączącego ładunki Q i $2Q$.

Rozwiązanie

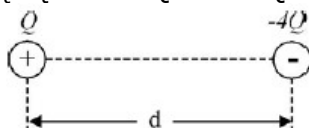
$$V = k \frac{2Q}{a}(3 - \sqrt{3})$$

gdzie:

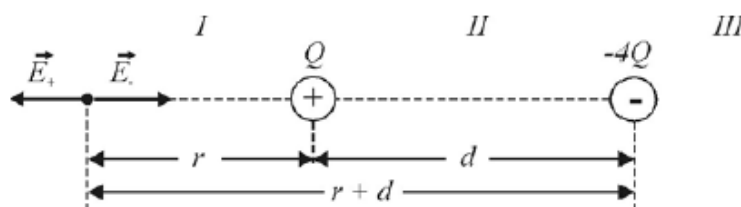
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$$

Zadanie 10.

Na końcach odcinka o długości d znajdują się ładunki $Q > 0$ i $-4Q$.



W jakich punktach prostej przechodzącej przez ładunki: (a) natężenie pola równa się zero, (b) potencjał pola równa się zero, (c) występuje minimum (lokalne) potencjału?

Rozwiązanie

(a) Oznaczając przez E_+ natężenie pola elektrycznego od ładunku dodatniego, a przez E_- natężenie pola elektrycznego od ładunku ujemnego, oraz przez r odległość od ładunku dodatniego, możemy stwierdzić, że natężenie wypadkowe może być równe zero tylko w obszarze I. Dla tego obszaru:

$$E_+ = k \frac{Q}{r^2}$$

$$E_- = k \frac{4Q}{(r+d)^2}$$

i $E_+ = E_-$, czyli:

$$k \frac{Q}{r^2} = k \frac{4Q}{(r+d)^2}$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe na r :

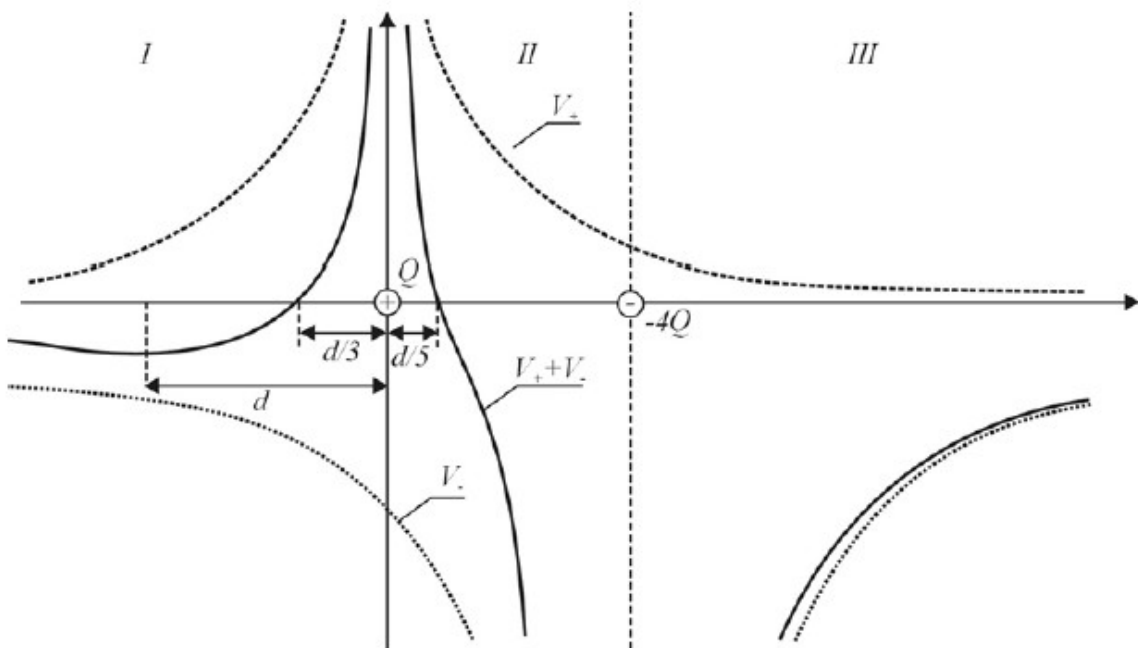
$$3r^2 - 2dr - d^2 = 0$$

Z równania tego otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$r_1 = d \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{3}d$$

czyli natężenie pola elektrostatycznego równe zero wystąpi z lewej strony ładunku Q w odległości $d/3$. Drugie rozwiązanie $r = r_2 = -\frac{1}{3}d$ będzie odpowiadało położeniu na prawo od ładunku Q . W punkcie tym natężenia E_+ i E_- są również równe, lecz są zgodnie skierowane (sprawdź to!).

(b)



Korzystamy z zasady superpozycji pól:

$$V = V_+ + V_-$$

gdzie:

$$V_+ = k \frac{Q}{|r|}$$

to wartość potencjału elektrycznego w punkcie odległym o r od ładunku Q ,

$$V_- = -k \frac{4Q}{|r'|}$$

to wartość potencjału elektrycznego w punkcie odległym o r' od ładunku $-4Q$.
Wartość odległości r' związana jest z odległością r następującą zależnością:

$$r' = \begin{cases} |r| + d & \text{w obszarze I} \\ d - |r| & \text{w obszarze II} \\ |r| - d & \text{w obszarze III} \end{cases}$$

W dalszych rozważaniach zamiast $|r|$ będziemy pisać r pamiętając, że jest to wartość bezwzględna. W obszarze I wartość wypadkowego potencjału V wyraża się wzorem:

$$V = V_+ + V_- = k \frac{Q}{r} - k \frac{4Q}{r+d} = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{4}{r+d} \right)$$

$$V = 0 \Leftrightarrow r = \frac{d}{3}$$

w obszarze II zaś:

$$V = V_+ + V_- = k \frac{Q}{r} - k \frac{4Q}{d-r} = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{4}{d-r} \right)$$

$$V = 0 \Leftrightarrow r = \frac{d}{5}$$

Jak łatwo sprawdzić, w obszarze III wypadkowy potencjał nie przyjmuje wartości równej zeru.

(c) Minimum lokalne potencjału wypadkowego może wystąpić tylko w obszarze I. Korzystając z warunku ekstremum funkcji:

$$\frac{dV}{dr} = 0$$

znajdujemy wartość odległości tego punktu od ładunku Q : $r = d$. Jest to równocześnie wartość odległości, w której $E = 0$. Wynika to ze związku

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

który w przypadku jednowymiarowym wyraża się wzorem:

$$E = \frac{-dV}{dr}$$

Zadanie 11.

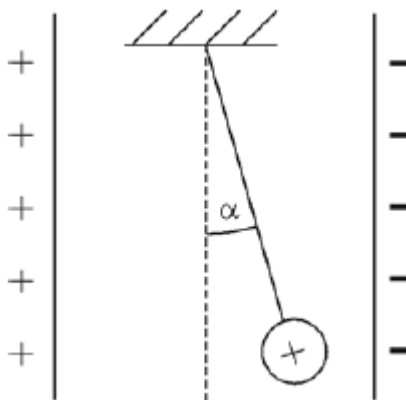
Potencjał w pewnym punkcie pola pochodzącego od ładunku punkowego wynosi $V = 600 \text{ V}$, a natężenie pola wynosi $E = 200 \text{ N/C}$. Oblicz wielkość ładunku i odległość tego punktu od ładunku. Przyjmij $\epsilon_r = 1$.

Rozwiązanie

$$r = 3 \text{ m}, Q = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

Zadanie 12.

Mała kulka o masie $m = 0,2 \text{ g}$ wisi na nici między dwiema naładowanymi płytami. Kulka naładowana jest ładunkiem $q = 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.



Ile wynosi różnica potencjałów między płytami, jeżeli nić tworzy z pionem kąt $\alpha = 10^\circ$, a odległość między płytami $d = 0,1 \text{ m}$?

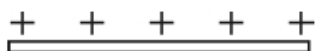
Rozwiązanie

$$U = \frac{\tan \alpha \cdot m \cdot g \cdot d}{q} = 5,77 \cdot 10^3 \text{ V}$$

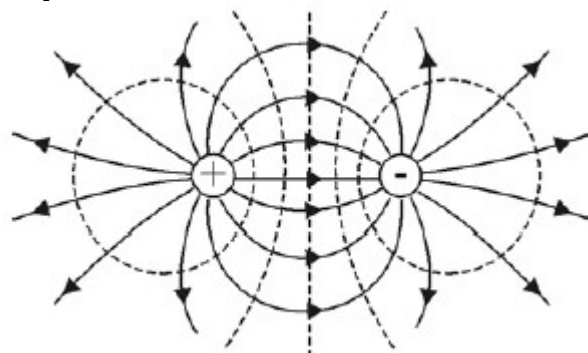
Zadanie 13.

Narysuj linie sił pola elektrycznego oraz powierzchnie stałego potencjału dla przedstawionych poniżej układów ładunków elektrycznych:

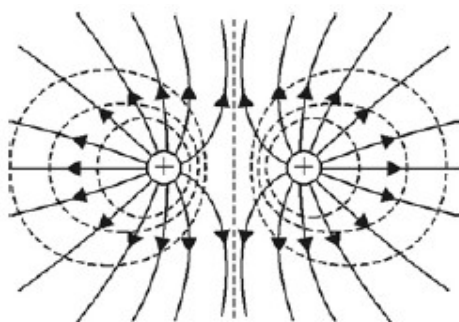
- | | | |
|-----|-----------|----------|
| (a) | $+Q$
 | $-Q$
 |
| (b) | $+Q$
 | $+Q$
 |
| (c) | $+2Q$
 | $-Q$
 |



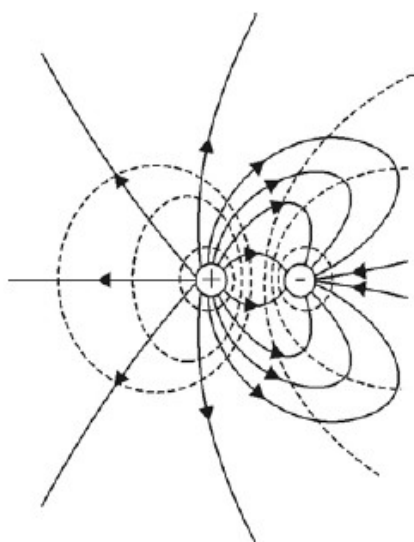
Rozwiązanie



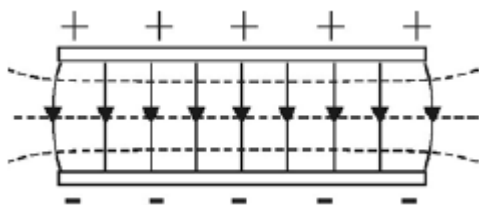
(a)



(b)



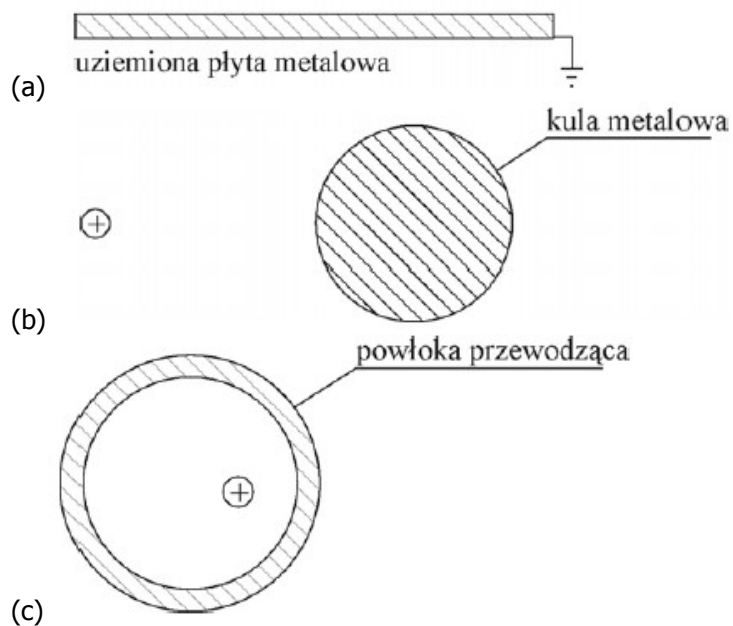
(c)



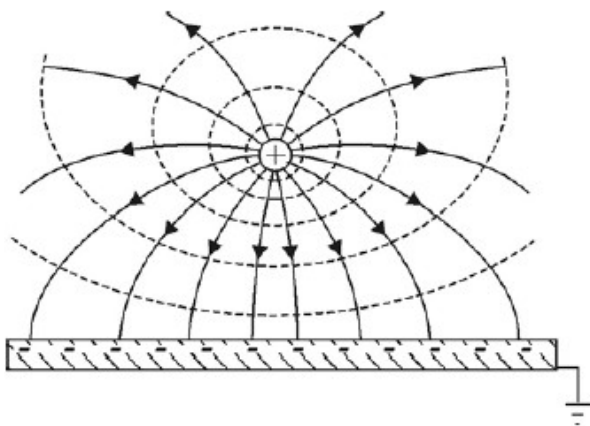
(d)

Zadanie 14.

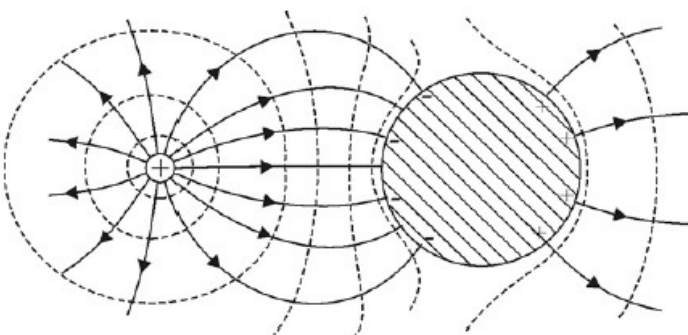
Jak wpływają przedmioty przewodzące na rozkład pola elektrycznego? Narysuj linie sił pola elektrycznego i powierzchnie ekwipotencjalne dla poniższych układów:



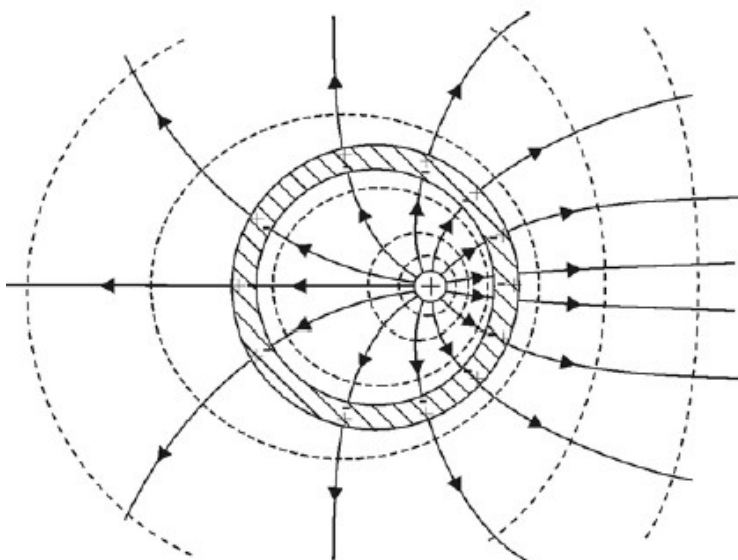
Rozwiązanie



(a)



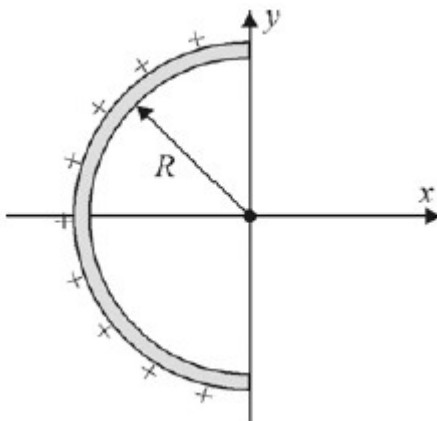
(b)



(c)

Zadanie 15.

Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego w środku półpierścienia o promieniu R naładowanego równomiernie ładunkiem Q .

**Rozwiązanie**

$$V = k \frac{Q}{R}$$

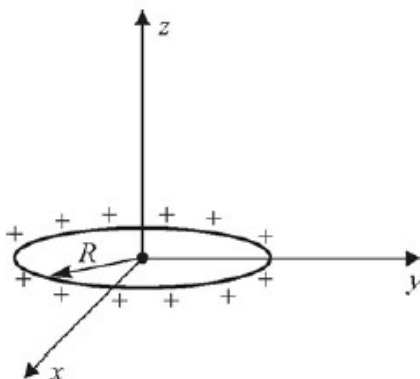
$$E = k \frac{Q}{\pi R^2} \cdot 2$$

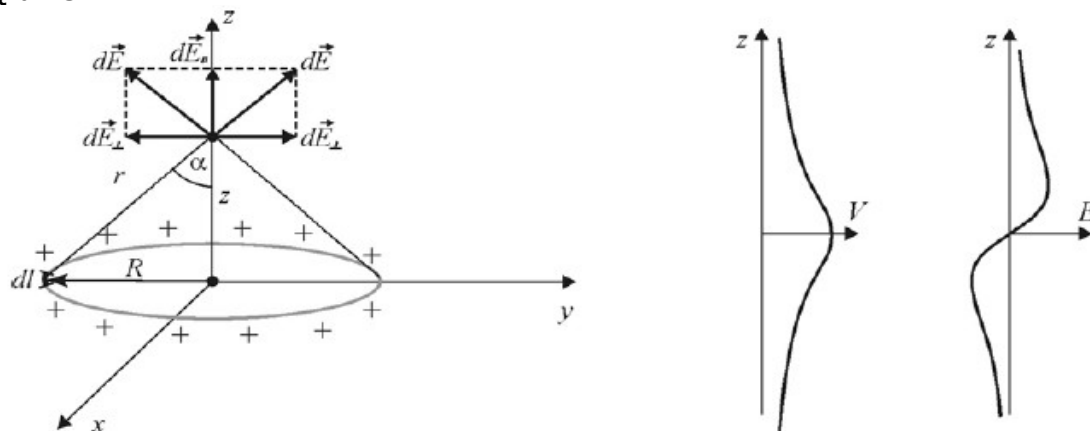
Wskazówka: Należy skorzystać z zasady superpozycji oddziaływań, podobnie jak w zad. 14.7. Potencjały należy sumować skalarnie, a natężenia wektorowo.

Zadanie 16.

Druciany pierścień o promieniu R naładowany jest równomiernie ładunkiem Q . Oblicz i wykreśl zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego od tego pierścienia dla punktów znajdujących się na osi prostopadłej do powierzchni pierścienia. Wartości natężenia pola elektrycznego wyznacz dwoma metodami: (a) metodą superpozycji pól oraz (b) ze związku

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$



Rozwiązanie

Ładunek dq znajdujący się na elemencie długości pierścienia dl wytwarza na osi z w odległości r od niego potencjał dV :

$$dV = \frac{dQ}{r}$$

ponieważ:

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R} dl,$$

a

$$r = \sqrt{R^2 + z^2},$$

więc:

$$V = k \frac{Q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} dl$$

Po scałkowaniu:

$$V = k \frac{Q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi R} dl$$

skąd:

$$V = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Z symetrii układu widać, że składowe natężenia pola elektrycznego prostopadłe do osi z skompensują się, dlatego $E = E_z$.

(a) Korzystając z zasady superpozycji możemy napisać:

$$dE = k \frac{dQ}{r^2}, \quad dE_z = dE \cos \alpha$$

ale:

$$\cos \alpha = \frac{z}{r}$$

więc:

$$dE_z = k \frac{dQ}{r^2} \frac{z}{r} = k \frac{z}{r^3} \frac{Q}{2\pi R} dl$$

skąd:

$$E_z = k \frac{z}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3} \frac{Q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl = k \frac{Qz}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3}$$

$$E = E_z = k \frac{Qz}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3}$$

(b)

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

W naszym przypadku wyrażenie to możemy zapisać w postaci:

$$E = E_z = \frac{-dV}{dz} = -\frac{d}{dz} \left(k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

stąd:

$$E = E_z = k \frac{Qz}{\left(\sqrt{R^2 + z^2}\right)^3}$$

Zadanie 17.

Oblicz natężenie pola elektrycznego na symetrycznej odcinka o długości $2a$ naładowanego ze stałą gęstością ładunku liniowego λ . Wykaż, że pole to staje się w granicznych przypadkach polem elektrycznym: (a) nieskończenie długiego przewodnika, (b) ładunku punktowego.

Rozwiązanie

$$E = k \frac{2a\lambda}{r\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$\frac{r}{a} \gg 1$$

1 dla

$$E = k \frac{2a\lambda}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

gdzie $q = 2a\lambda$.

$$\frac{a}{r} \gg 1$$

2 dla

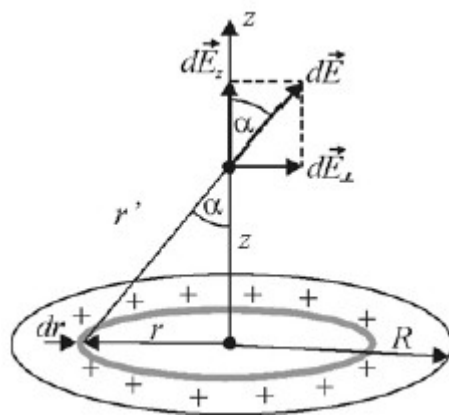
$$E = k \frac{2\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

Zadanie 18.

Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego na osi symetrii prostopadłej do powierzchni naładowanego ładunkiem Q krążka o promieniu R . Wykaż, że pole to staje się w skrajnym przypadku polem elektrycznym: (a) płaszczyzny nieskończonej, (b) ładunku punktowego.

Rozwiązanie

Posługując się zasadą superpozycji pól znajdujemy podobnie jak w zad.14. wartości potencjału i natężenia pola elektrycznego dla punktów znajdujących się na osi z .



Potencjał dV od ładunku dQ , znajdującego się na pierścieniu o promieniu r i szerokości dr , w punkcie znajdującym się na osi z w odległości r' od promienia, równa się:

$$dV = k \frac{dQ}{r'}$$

ale:

$$dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$$

gdzie σ – gęstość powierzchniowa ładunku, a

$$r' = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Stąd:

$$dV = k \frac{2\pi r \cdot dr \cdot \sigma}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Wartość potencjału V od całego krążka równa się więc:

$$V = k 2\pi \sigma \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Całkując przez podstawienie otrzymujemy:

$$V = k2\pi\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

Podstawiając za σ :

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

otrzymujemy:

$$(1) \quad V = k \frac{2Q}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

Ponieważ natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, dlatego też składową pola w kierunku osi z od ładunku znajdującego się na pierścieniu, można wyrazić wzorem:

$$dE_z = dE \cos \alpha = k \frac{dQ}{r'^2} \frac{z}{r'} = k \frac{dQz}{r'^3}$$

Podstawiając za

$$dQ : dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$$

oraz za

$$r' : r' = \sqrt{r^2 + z^2}$$

otrzymamy:

$$E_z = k \cdot 2\pi\sigma z \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\left(\sqrt{r^2 + z^2} \right)^3}$$

skąd:

$$E_z = k \cdot 2\pi\sigma z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

lub kładąc

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$(2) \quad E_z = k \frac{2Q}{R^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Dla $z \gg R$, czyli dla dużych odległości wyrażenie na potencjał (1) można zapisać w postaci:

$$V = k \frac{2Q}{R^2} \left(|z| \sqrt{1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2} - |z| \right)$$

Wyłączając $|z|$ przed nawias i stosując przybliżenie

$$\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2$$

słuszne dla

$$\frac{R}{z} \ll 1$$

otrzymamy:

$$V = k \frac{Q}{|z|}$$

Stosując analogiczne przybliżenie do wyrażenia (2) na składową E_z pola elektrycznego otrzymamy:

$$E_z = k \frac{Q}{z^2}$$

Dla drugiego skrajnego przypadku, czyli dla wartości z odpowiadającym punktom leżącym w pobliżu krążka, spełniona jest relacja $z \ll R$, lub równoważna

$$\frac{z}{R} \ll 1$$

Wartość potencjału dla tych punktów możemy otrzymać przez zastosowanie następującego przybliżenia w wyrażeniu (1)

$$\sqrt{R^2 + z^2} \approx R$$

dla $R \gg z$. Stąd:

$$V = k \frac{2Q}{R^2} (R - |z|)$$

Natomiast dla $R \gg z$, w wyrażeniu na składową E_z pola, możemy zaniedbać drugi człon w nawiasie, co prowadzi do wyrażenia na natężenie pola elektrycznego od naładowanej nieskończonej powierzchni:

$$E = k \frac{2Q}{R^2} \frac{z}{|z|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$$

Zadanie 19.

Potencjał pola elektrycznego określony jest równaniem:

$$V = a(x^2 + y^2) + bz^2,$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$.

- Jaki jest kształt powierzchni ekwipotencjalnych?
- Wyznacz wektor natężenia pola elektrycznego $\mathbf{r}$ i jego moduł E .
- Jaki jest kształt powierzchni, na których $E = \text{const}$?
- Jaki kształt będą miały powierzchnie ekwipotencjalne gdy potencjał będzie określony równaniem:

$$V = a(x^2 + y^2) - bz^2$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$?

Rozwiązanie

(a) Powierzchnie ekwipotencjalne mają kształt elipsoidy obrotowej o półosiach:

$$\sqrt{\frac{V}{a}}, \sqrt{\frac{V}{a}}, \sqrt{\frac{V}{b}}.$$

(b)

$$\vec{E} = -2(ax\vec{i} + ay\vec{j} + bz\vec{k})$$

$$E = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}$$

Wskazówka: Skorzystać ze związku

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

(c) Powierzchnie, na których $E = \text{const}$ mają również kształt elipsoidy obrotowej o innych półosiach:

$$\frac{E}{2a}, \frac{E}{2a}, \frac{E}{2b}$$

(d) W tym przypadku dla wartości potencjału $V > 0$ powierzchnie ekwipotencjalne będą miały kształt jednopłatowej hiperboloidy obrotowej, dla $V = 0$ kształt stożka, a dla $V < 0$ kształt dwupłatowej hiperboloidy obrotowej.

Zadanie 20.

Korzystając z zasady superpozycji oddziaływań, oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego od układu dwóch ładunków $+Q$ i $-Q$ oddległych od siebie o d (dipol elektryczny) w odległości r od środka dipola: (a) na symetralnej odcinka łączącego obydwie ładunki, (b) na prostej łączącej obydwie ładunki.

Rozwiązanie

(a) $V = 0$,

$$E = k \frac{p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

gdzie

$$p = Qd$$

(b) $V = k \frac{p}{r^2},$

$$E = k \frac{2p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$$

Wzory te słuszne są przy założeniu: $r \gg d$.

Zadanie 21.

Oblicz potencjał i wartości bezwzględne natężenia pola elektrycznego dipola o momencie p jako funkcję r i ϕ , gdzie r oznacza odległość od środka a ϕ kąt między osią dipola i prostą łączącą środek dipola z danym punktem.

Rozwiązanie

Potencjał w dowolnym punkcie C, odległym od dipola o r , liczymy sumując potencjały od obu ładunków.

$$V = k \frac{Q}{r_1} - k \frac{Q}{r_2} = kQ \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Dla

$$r \gg l \quad r_1 \approx r_2 \approx r$$

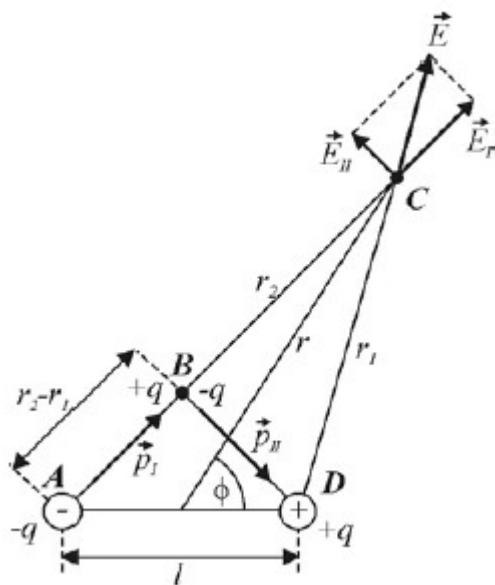
a

$$r_2 - r_1 = l \cos \phi$$

skąd:

$$V = k \frac{Ql \cos \phi}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \phi}{r^2}$$

gdzie: $p = q \cdot l$ – moment dipolowy.



Wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie C liczymy posługując się następującym rozumowaniem: Załóżmy, że w punkcie B umieścimy obok siebie dwa ładunki: $+q$ i $-q$. Nie wpłyną one na pole pierwotne, lecz teraz już nasz układ można traktować jak dwa dipole: p_I i p_{II} . Z trójkąta prostokątnego ABD wynika, że długość boku

$$AB \approx l \cos \phi$$

a boku

$$BD \approx l \sin \phi$$

Stąd wartość dipola

$$p_I = ql \cos \phi = p \cos \phi$$

a dipola

$$p_{II} = ql \sin \phi = p \sin \phi$$

Natężenie pola elektrycznego w punkcie C można traktować jako sumę wektorową pól: E_I – pochodzącego od dipola p_I (na jego osi), oraz pola E_{II} – pochodzącego od dipola p_{II} (na jego osi symetrii), czyli:

$$E_I = k \frac{2p_I}{r^3} = k \frac{2p \cos \phi}{r^3}$$

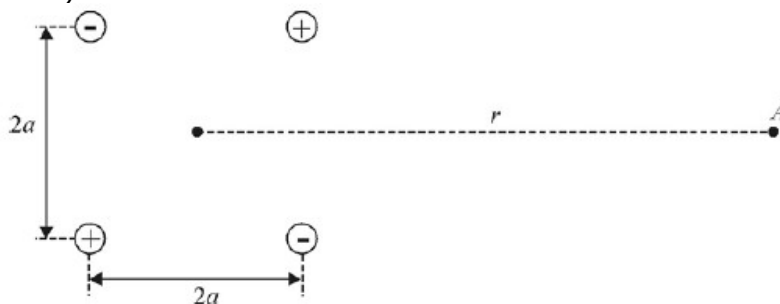
$$E_{II} = k \frac{p_{II}}{r^3} = k \frac{p \sin \phi}{r^3}$$

stąd:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_I^2 + E_{II}^2} = k \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \\ &= k \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \phi + 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \phi + 1} \end{aligned}$$

Zadanie 22.

Układ czterech ładunków q rozmieszczonych w narożach kwadratu o boku $2a$ jak na rysunku tworzy kwadrupol. Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego w punkcie leżącym w odległości $r > a$ od środka kwadrupola (patrz rysunek):



Rozwiązanie

$$V = 0, \quad E = k \frac{6Q}{r^4} = \frac{3Q}{2\pi\epsilon_0 r^4}$$

gdzie: $Q = 2qa^2$ – moment kwadrupolowy.

Wskazówka: Natężenie pola elektrycznego kwadrupola możemy traktować jako złożenie dwu pól dipolowych w punkcie leżącym na ich osi symetrii. Należy zwrócić uwagę, że odległości między ładunkami wynoszą $2a$.

Zadanie 23.

Kwadrupolem liniowym nazywamy układ czterech ładunków q umieszczonych na jednej prostej, jak na rysunku. Układ ten możemy traktować jako składający się z dwóch stykających się dipoli. Oblicz potencjał i natężenie pola elektrycznego na osi kwadrupola w odległości $r \gg a$.

**Rozwiązanie**

$$V = k \frac{Q}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3}, \quad E = k \frac{3Q}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{r^4}$$

gdzie: $Q = 2qa^2$.

Zadanie 24.

W jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 2 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ znajduje się dipol elektryczny o momencie dipolowym $p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}$. Narysuj siły działające na dipol oraz oblicz moment tych sił, jeżeli oś dipola tworzy z polem elektrycznym kąt $\alpha = 30^\circ$.

Rozwiązanie

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$M = p \cdot E \cdot \sin \alpha = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadanie 25

Dipol o momencie $p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}$ znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym o gradiencie

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$$

Oblicz siłę wywieraną przez pole na dipol w tym polu.

Rozwiązanie

$$F = p \frac{\Delta E}{\Delta x} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Zadanie 26.

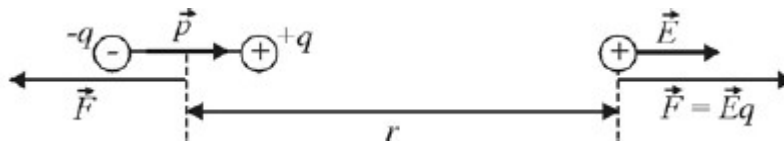
Na dipol elektryczny w niejednorodnym polu elektrycznym działa siła wciągająca lub wypychająca go z pola w zależności od ustawienia dipola. Wyjaśnij, dlaczego skrawki papieru są zawsze przyciągane do naelektryzowanej pałeczki.

Rozwiązanie

Skrawki papieru są elektrycznie obojętne. Dopiero pod wpływem pola elektrycznego skrawki papieru stają się dipolami indukowanymi. Przy takim zaś ustawieniu dipola, będzie on wciągany przez niejednorodne pole elektryczne. (Zrób rysunek i narysuj siły działające na poszczególne ładunki dipola).

Zadanie 27.

W polu elektrycznym wytworzonym przez punktowy ładunek q w odległości r od niego znajduje się dipol elektryczny o momencie p . Oblicz siłę, jakiej doznaje dipol od ładunku punkowego, w przypadku, gdy ładunek q znajduje się: (a) na osi dipola, (b) na symetralnej dipola.

Rozwiązanie

(a) W punkcie, w którym znajduje się ładunek q występuje pole elektryczne od dipola o natężeniu E :

$$E = k \frac{2p}{r^3}$$

Dlatego też na ładunek będzie działała siła:

$$F = qE = k \frac{2pq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2pq}{r^3}$$

Na dipol zaś, zgodnie z III zasadą dynamiki, będzie działała siła równa, przeciwnie skierowana.

(b) Stosując podobne rozumowanie jak w punkcie (a), otrzymujemy wartość siły:

$$F = k \frac{pq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pq}{r^3}$$

Zadanie 28.

Wyznaczyć wartość momentu siły działającego na dipol o momencie dipolowym p umieszczony w odległości r od bardzo dużej okrągłej płyty metalowej o promieniu R ($R \gg r$) naładowanej ładunkiem ujemnym o gęstości powierzchniowej $-\sigma$. Dipol jest ustawiony pod kątem 45° do płyty.

Rozwiązanie

$$M = pE \sin \alpha$$

gdzie: E – natężenie pola elektrycznego od naładowanej płyty. Dla

$$R \gg r, \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Patrz zad.18.

Stąd:

$$M = p \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \alpha$$

Zadanie 29.

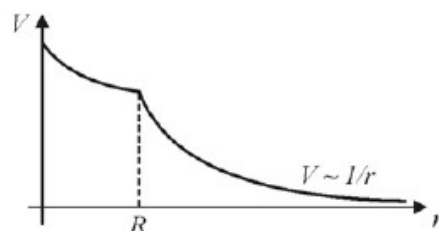
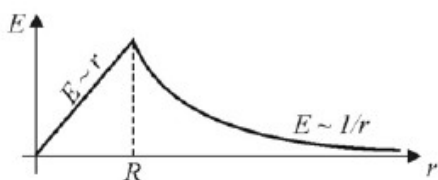
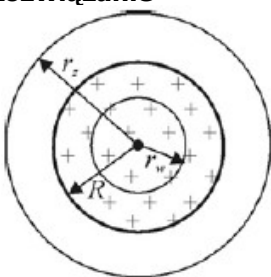
Korzystając z prawa Gaussa, wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez płaszczyznę naładowaną równomiernie ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ .

Rozwiązanie

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Zadanie 30.

Nieprzewodzącą kulę o promieniu R naładowano jednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej ρ . Oblicz zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego w funkcji odległości od środka kuli. Przedstaw graficznie otrzymane zależności. Przyjmij $\epsilon_r = 1$ wewnątrz kuli.

Rozwiązanie

(a) $r < R$. Korzystamy z prawa Gaussa:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

gdzie: q – ładunek zawarty wewnątrz powierzchni gaussowskiej (sfery) o promieniu $r = r_w < R$.

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

stąd całkując (1) otrzymamy:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \rho}{\epsilon_0}$$

skąd:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

(b) Dla $r > R$:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2)$$

gdzie:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

to ładunek zawarty w całej naładowanej kuli. dla sfery gaussowskiej o promieniu $r = r_z > R$ otrzymamy, całkując (2):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3 \rho}{3 \epsilon_0}$$

skąd:

$$(3) \quad E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}.$$

Ze wzoru (3) wynika, że dla $r > R$ natężenie pola elektrycznego naładowanej objętościowo kuli jest identyczne z polem od ładunku punkowego, znajdującego się w środku kuli.

Potencjał pola elektrycznego w naładowanej kuli liczymy korzystając ze związku:

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

dla $r \geq R$:

$$dV = -E \cdot dr = -\frac{\rho R^3 dr}{3\epsilon_0 r^2}$$

skąd:

$$V = V_{zew} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C$$

dla

$$r \rightarrow \infty \quad V = 0 \Rightarrow C = 0$$

czyli:

$$V = V_{zew} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

dla $r < R$:

$$dV = -E \cdot dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr$$

skąd, po scałkowaniu:

$$V = V_{wew} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + C$$

. Stałą C wyliczymy z warunku:

$$V_{wew}(R) = V_{zew}(R) \Rightarrow C = \frac{1}{2} \frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$$

dlatego:

$$V = V_{wew} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$$

czyli:

$$V = V_{\text{wewn}} = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

Zadanie 31.

Metalową kulę o promieniu R naładowano ładunkiem q . (a) Oblicz i wykreśl zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego w funkcji odległości od środka kuli. (b) Jak zmieni się rozkład pola elektrycznego, gdy zamiast metalowej, użyjemy kuli z dielektryka naładowanej powierzchniowo ładunkiem q .

Rozwiązanie

(a) Dla $r < R$:

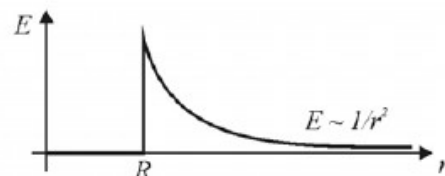
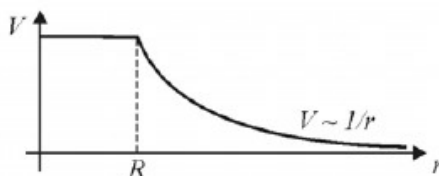
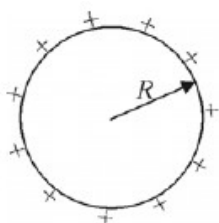
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \text{const}$$

$$E(r) = 0$$

dla $r > R$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$



(b) Na zewnątrz i wewnątrz kuli z dielektryka, naładowanej powierzchniowo ładunkiem q , pole będzie identyczne z polem od kuli metalowej o tych samych rozmiarach i naładowanej identycznym ładunkiem.

Zadanie 32.

Nieskończenie długą prostą nicię znajdującą się w próżni naładowano ze stałą gęstością liniową ładunku $\lambda = 2 \cdot 10^{-6} \text{C/m}$. (a) Wyznacz moduł natężenia pola E i potencjał V jako funkcję odległości r od nici. (b) Oblicz E i V dla $r = 10 \text{m}$.

Rozwiązanie

(a)

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}, \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

(b)

$$E = 3,5 \cdot 10^3 \text{ V/m}, V = -0,83 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Wskazówka: W celu obliczenia E należy posłużyć się prawem Gaussa. Potencjał należy wyznaczyć całkując zależność:

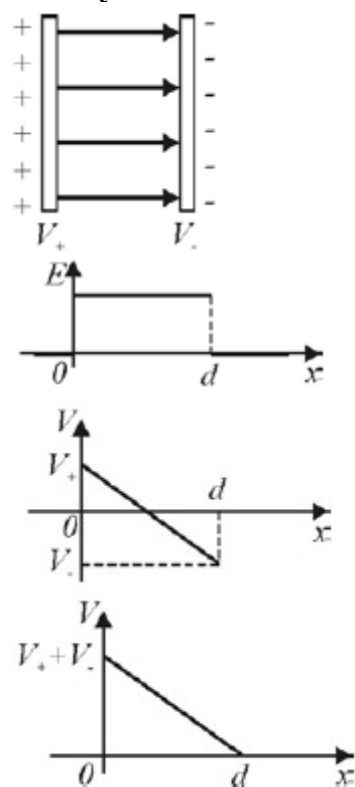
$$E = -\frac{dV}{dr}$$

Stałą całkowania nie można jednak wyznaczyć z zależności $V = 0$ dla $r \rightarrow \infty$. Stałą C dobieramy tak, aby $V = 0$ dla $r = r_0 = 1 \text{ m}$.

Zadanie 33.

Ładunki o przeciwnych znakach są rozłożone ze stałymi gęstościami powierzchniowymi $+\sigma$ i $-\sigma$ odpowiednio na dwóch metalowych płaszczyznach nieskończonych, równoległych względem siebie i oddległych o d . (a) Oblicz i wykreśl zależność potencjału i natężenia pola elektrycznego w funkcji odległości między płytami. (b) Jak zmieni się rozkład pola, gdy jedną z płyt połączymy z ziemią?

Rozwiązanie



1) Natężenie pola elektrycznego równa się: między płytkami:

$$0 \leq x \leq d: E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

poza płytkami:

$$0 < x \text{ i } x > d: E = 0$$

Potencjał liczymy z zależności:

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

skąd:

$$\int_{V_+}^V dV = -\int_0^x E dx$$

Po scałkowaniu:

$$V - V_+ = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} x$$

ostatecznie:

$$V = V_+ - \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

(b) Gdy jedną z płyt połączymy z ziemią, wówczas potencjał jej będzie równy zeru, a druga płyta będzie na potencjale $V_+ + V_-$.

Zadanie 34.

Oblicz pojemność odosobnionej kulki metalowej o promieniu R .

Rozwiązanie

Korzystając z definicji pojemności elektrycznej odosobnionego przewodnika:

$$C = \frac{Q}{V}$$

gdzie: Q – ładunek na przewodniku, a V – potencjał na powierzchni przewodnika. Pamiętaj, że dla kuli o promieniu R :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

otrzymamy:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Zadanie 35.

Oblicz, korzystając z definicji pojemności elektrycznej, pojemność kondensatora: (a) płaskiego, (b) kulistego, (c) walcowego.

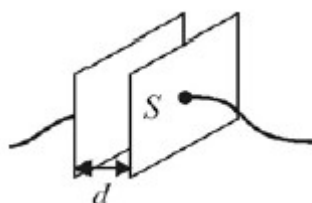
14.35.R. Pojemność kondensatora:

(a) Płaskiego:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$$

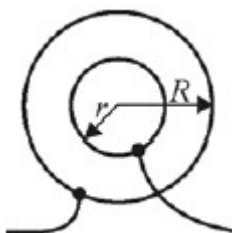
dla

$$S \gg d^2$$



(b) Kulistego:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}$$

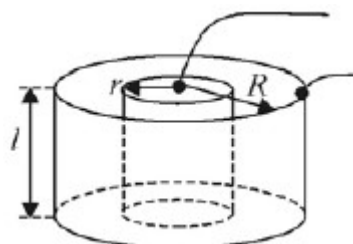


(c) Walcowego:

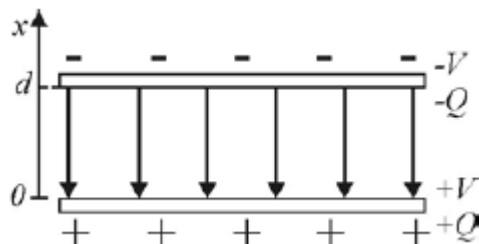
$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \frac{R}{r}}$$

dla

$$l \gg R \text{ i } r$$



Sposób obliczania pojemności kondensatorów pokażemy na przykładzie kondensatora płaskiego.



Natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

gdzie:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

to gęstość powierzchniowa ładunku, S – powierzchnia okładki. Korzystając z zależności:

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

otrzymamy:

$$\int_{V_+}^{V_-} dV = -\int_0^d E dx = -\int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx$$

skąd otrzymamy:

$$V_- - V_+ = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad | \cdot (-1)$$

$$V_+ - V_- = U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d ,$$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Podstawiając do ostatniego wyrażenia za σ : , dostajemy:

$$U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

skąd otrzymamy wyrażenie na pojemność kondensatora płaskiego:

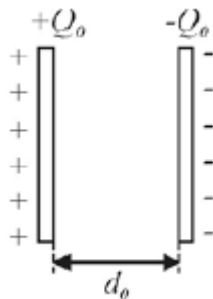
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Zadanie 36.

Płaski kondensator naładowano do napięcia U_0 i odłączono od źródła. Jak zmieni się: (a) napięcie na kondensatorze, (b) natężenie pola elektrycznego, (c) ładunek na okładkach, jeżeli okładki zsuniemy na n razy mniejszą odległość?

Rozwiązanie

przed zsunięciem:



po zsunięciu:



Pojemności:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d_0},$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_0}{n}} = nC_0$$

Ładunki:

$$Q_0 = C_0 U_0$$

$$Q = Q_0 = CU$$

(a)

$$C_0 U_0 = CU$$

$$C_0 U_0 = nC_0 U \rightarrow U = \frac{U_0}{n}$$

Napięcie zmniejsza się n razy.

(b)

$$E_0 = \frac{U_0}{d_0}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\frac{U_0}{n}}{\frac{d_0}{n}} = \frac{U_0}{d_0} = E_0$$

$$E = E_0 = \text{const}$$

Natężenie pola elektrycznego nie zmieni się.

(c)

$$Q = Q_0 = \text{const}$$

Zadanie 37.

Płaski kondensator połączono z biegunami akumulatora o siły elektromotorycznej E . Jak zmieni się ładunek Q na kondensatorze, jeżeli zsuniemy okładki na n razy mniejszą odległość? Jak zmieni się wówczas natężenie pola elektrycznego?

Zadanie 38.

Do dwóch szeregowo połączonych kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 100\text{pF}$ i $C_2 = 200\text{pF}$ przyłożono stałe napięcie $U = 300\text{V}$. Oblicz napięcia U_1 i U_2 na kondensatorach i ładunki q_1 i q_2 na ich okładkach. Jaka jest pojemność C tego układu?

Rozwiązanie

Ładunki na okładkach obu kondensatorów połączonych szeregowo spełniają relację:

$$\begin{cases} q_1 = q_2 = q = UC \\ q_1 = C_1 U_1 & q_2 = C_2 U_2 \end{cases}$$

gdzie C – pojemność zastępcza

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

a q – ładunek wypadkowy. Z tych trzech równań otrzymujemy:

$$U_1 = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 200\text{V}, \quad U_2 = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 100\text{V}$$

$$q_1 = q_2 = q = UC = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

Zadanie 39.

Płaski kondensator powietrzny, o odległości między okładkami d , naładowano ładunkiem Q . (a) Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego po wprowadzeniu między okładki, równoległe do nich, metalowej płytki o grubości l ? Powierzchnie okładek i płytki wynoszą S . (b) Oblicz pojemność C układu z płytką. (c) Jak zmieni się napięcie między okładkami w wyniku wprowadzenia płytki?

Rozwiązanie

(a) Natężenie pola elektrycznego nie zmieni się w wyniku wprowadzenia płytki metalowej między okładki kondensatora, bowiem:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

(b) Pojemność kondensatora po włożeniu płytki wzrośnie:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d-l}$$

(c) Ponieważ ładunek na okładkach kondensatora jest stały, a pojemność wzrośnie, w związku z tym napięcie zmaleje o:

$$\Delta U = -\frac{Ql}{\varepsilon_0 S}$$

Zadanie 40.

Kulka rtęci, naładowana do potencjału V , podzieliła się na dwie kulki, z których jedna ma n razy większą objętość od drugiej. Do jakich potencjałów będą naładowane te kulki?

Rozwiązanie

Ponieważ kulki rtęci są przewodzące, więc ich potencjały w chwili rozdzielania i potem muszą być równe

$$V_1 = V_2 = V \frac{\sqrt[3]{1+n}}{1+\sqrt[3]{n}}$$

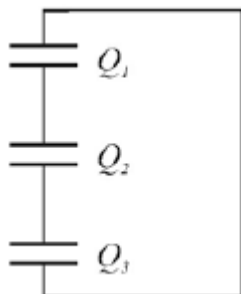
Wskazówka: Skorzystaj z prawa zachowania ładunku, definicji pojemności kulki, oraz z faktu, że objętość pierwotna kulki będzie równa sumie objętości obu kulek.

Zadanie 41.

Każdy z trzech kondensatorów o pojemnościach C_1 , C_2 , C_3 naładowano do napięcia U i następnie, po odłączeniu źródła napięcia, wszystkie połączono szeregowo (rys. a)



Oblicz ładunki Q_1 , Q_2 , Q_3 na okładkach kondensatorów tak otrzymanego układu kondensatorów po zwarcu ich przewodnikiem (rys. b).



Rozwiązanie

W wyniku zwarcia kondensatorów nastąpi przepływ jednakowego ładunku między kolejnymi kondensatorami, aż do chwili, gdy okaże się, że suma napięć na wszystkich kondensatorach stanie się równa zero. W Wyniku tego ładunki na poszczególnych kondensatorach będą równe:

$$Q_1 = C_z U \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1}{C_3} - 2 \right)$$

$$Q_2 = C_z U \left(\frac{C_2}{C_1} + \frac{C_2}{C_3} - 2 \right)$$

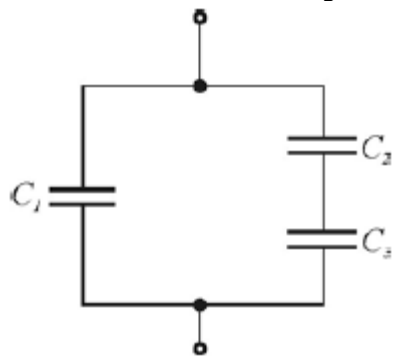
$$Q_3 = C_z U \left(\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} - 2 \right)$$

gdzie:

$$C_z = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1}$$

Zadanie 42.

Trzy kondensatory o pojemnościach C_1 , C_2 , i C_3 połączone jak na rysunku i naładowano ładunkiem Q . Oblicz ładunki na okładkach każdego z kondensatorów.

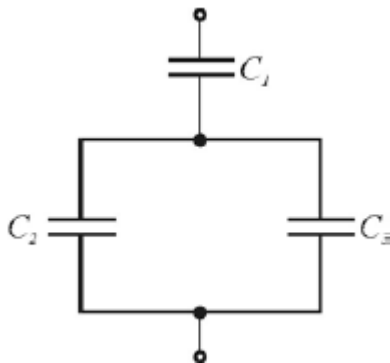
**Rozwiązanie**

$$Q_1 = \frac{C_1(C_1 + C_3)}{C_2C_3 + C_1C_2 + C_3C_1} Q,$$

$$Q_2 = Q_3 = \frac{C_2C_3}{C_2C_3 + C_1C_2 + C_3C_1} Q$$

Zadanie 43.

Trzy kondensatory o pojemnościach C_1 , C_2 , i C_3 połączono jak na rysunku i naładowano ładunkiem Q . Oblicz ładunki na okładkach każdego z kondensatorów.

**Rozwiązanie**

$$Q_1 = Q,$$

$$Q_2 = Q \frac{C_2}{C_2 + C_3}$$

$$Q_3 = Q \frac{C_3}{C_2 + C_3}$$

Zadanie 44.

Ile razy trwały moment dipolowy cząsteczki tlenku węgla CO, który wynosi $p_0 = 0,37 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$, jest większy od momentu dipolowego indukowanego w tej cząsteczce przez zewnętrzne pole elektryczne o natężeniu $E = 10^4 \text{ V/cm}$? Średnia polaryzowalność elektronowa cząsteczki CO wynosi $\alpha = 2,2 \text{ F} \cdot \text{m}^2$.

Rozwiązanie

$$p_{ind} = \alpha E = 2,2 \cdot 10^{-34} \text{ C} \cdot \text{m}$$

$$\frac{p_0}{p_{ind}} = 1680$$

Zadanie 45.

W odległości $r = 15 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ od atomu argonu znajduje się elektron. Oszacuj moment dipolowy indukowany w atomie argonu przez pole elektryczne elektronu. Polaryzowalność elektronowa atomu argonu wynosi $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-40} \text{ F} \cdot \text{m}^2$.

$$p_{ind} = \alpha E = \alpha \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0,12 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Zadanie 46.

Momenty dipolowe molekuł równają się sumie wektorowej odpowiednich momentów dipolowych wiązań. Oblicz moment dipolowy wiązania OH w molekułe wody, jeżeli moment dipolowy molekuły wody równa się $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$, a kąt między wiązaniami OH wynosi 104° .

Rozwiązanie

$$p_{OH} = 7,63 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Zadanie 47.

Stała elektryczna diamentu wynosi $\epsilon = 1,46 \cdot 10^{-10} \text{ C}/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$. Znajdź względną przenikalność ϵ_r i podatność dielektryczną χ diamentu. Ile wynosi polaryzowalność jednostki objętości i jednego mola diamentu? Gęstość diamentu $\rho = 3,51 \text{ g}/\text{cm}^3$, masa ołowa $\mu = 12 \text{ g}/\text{mol}$. Skorzystaj ze wzorów na wektor polaryzacji:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} = n_0\alpha\vec{E}$$

gdzie n_0 oznacza koncentrację dipoli.

Rozwiązanie

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 16,5$$

$$\chi = \epsilon_r - 1 = 15,5$$

$$n_0\alpha = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) = 1,4 \cdot 10^{-10} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$N_A\alpha = \frac{\mu}{\rho} n_0\alpha = 4,7 \cdot 10^{-16} \frac{\text{F} \cdot \text{m}^2}{\text{mol}}$$

Zadanie 48.

Jak zmieni się: (a) pojemność elektryczna, (b) ładunek na okładkach, (c) napięcie, (d) natężenie pola elektrycznego, jeżeli między elektrody kondensatora płaskiego o pojemności C_0 wsuniemy dielektryk o przenikalności ϵ_r i grubości d równej odległości między okładkami kondensatora? Rozpatrz dwa przypadki: (I) Kondensator po naładowaniu do napięcia U_0 odłączono od źródła. (II) Kondensator jest cały czas podłączony do źródła o napięciu U_0 .

Rozwiązanie

(I) Kondensator po naładowaniu do napięcia U_0 odłączono od źródła. W tym przypadku ładunek na okładkach nie będzie się zmieniał Q .

(a) Pojemność:

Przed włożeniem dielektryka:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Po włożeniu dielektryka:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = \epsilon_r C_0$$

Pojemność wzrośnie ϵ_r razy.

(b) Ładunek:

$$(1) Q_0 = C_0 U_0 = CU = \text{const}$$

(c) Napięcie:

Z równania (1) wynika, że:

$$U = U_0 \frac{C_0}{C} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

Napięcie zmniejszy się ϵ_r razy.

(d) Natężenie pola elektrycznego

$$E_0 = \frac{U_0}{d},$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\epsilon_r d} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

Natężenie pola elektrycznego wewnątrz dielektryka zmniejszy się ϵ_r razy, ponieważ ładunki polaryzacyjne na powierzchni dielektryka wytworzą pole przeciwne do pola zewnętrznego.

(II) Kondensator jest cały czas podłączony do źródła o napięciu U_0 . W związku z tym napięcie

$$U = U_0 = \text{const}$$

Napięcie nie zmienia się.

(a) Pojemność:

$$C = \epsilon_r C_0$$

(b) Ładunek na okładkach kondensatora:

$$Q_0 = C_0 U_0$$

$$Q = CU_0 = \epsilon_r C_0 U_0 = \epsilon_r Q_0$$

Ładunek wzrośnie ϵ_r razy. Ze źródła dopłynie na okładki dodatkowy ładunek

$$\Delta Q = Q - Q_0$$

równy ładunkowi polaryzacyjnemu.

(c) Napięcie:

$$U = U_0 = \text{const}$$

(d) Natężenie pola elektrycznego:

$$E_0 = \frac{U_0}{d},$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d} = E_0 = \text{const}$$

Natężenie pola elektrycznego nie ulegnie zmianie.

Zadanie 49.

Kondensator płaski, którego okładki są oddalone o $l = 1\text{cm}$ wypełniony jest olejem ($\epsilon_r = 5$). Jakie napięcie należy przyłożyć do kondensatora, aby gęstość ładunków polaryzacyjnych na oleju wynosiła $\sigma = 6,2 \cdot 10^{-10}\text{C/cm}^2$?

Rozwiązanie

$$\sigma = P_n = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \frac{U}{l}$$

$$U = \frac{\sigma \cdot l}{(\epsilon_r - 1)\epsilon_0} = 1750\text{V}$$

Wskazówka: Gęstość ładunków polaryzacyjnych równa się składowej normalnej wektora polaryzacji.

Zadanie 50.

Płaski kondensator próżniowy naładowano tak, że natężenie pola wynosi w nim $E_0 = 100\text{MV/m}$. Następnie wypełniono go dielektrykiem, którego drobiny są sztywnymi dipolami o momencie $p_e = 0,5 \cdot 10^{-29}\text{C}\cdot\text{m}$. Koncentracja dipoli $n = 10^{26}\text{m}^{-3}$. Oblicz średnią wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz dielektryka, pomijając wpływ ruchów cieplnych drobin.

Rozwiązanie

$$E = E_0 + \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{np_e}{\epsilon_0} = 43,4 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

Zadanie 51.

Oblicz gęstość ładunków polaryzacyjnych na powierzchni płytki mikowej ($\epsilon_r = 7$) o grubości $l = 0,2\text{mm}$, wypełniającej całkowicie płaski kondensator naładowany do napięcia $U_0 = 400\text{V}$. Jak i o ile zmieni się napięcie na kondensatorze po wyjęciu płytki?

Rozwiązanie

$$\sigma = P_n = \epsilon_0 \kappa \frac{U}{l} = 1,06 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$U_1 = U\epsilon_r = 2800\text{V}$$

Zadanie 52.

Płaski kondensator powietrzny, o pionowo ustawionych okładkach oddległych o d , naładowano i zanurzone częściowo w cieczy o względnej przenikalności dielektrycznej ϵ_r . Oblicz stosunek ładunków elektrycznych i natężeń pól elektrycznych w obu częściach kondensatora, jeżeli wysokość okładek wynosi H , a wysokość zanurzonej części jest h .

Rozwiązanie

Kondensator płaski o okładkach zanurzonych częściowo w cieczy dielektrycznej można rozpatrywać jako dwa kondensatory połączone równolegle. Dlatego $U_1 = U_2$, czyli:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

skąd:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{(H-h)}{\varepsilon_r h}$$

Ponieważ $U_1 = U_2$, więc:

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

Zadanie 53.

Płaski kondensator o powierzchni elektrod $S = 100 \text{ cm}^2$ oddalonych od siebie o $d = 1 \text{ cm}$ naładowano do napięcia $U_0 = 100 \text{ V}$ i odłączono od źródła. Następnie obszar między okładkami kondensatora ściśle wypełniono dwiema płytkami dielektrycznymi o grubościach $d_1 = 2 \text{ mm}$ i $d_2 = 8 \text{ mm}$, oraz stałych dielektrycznych $\varepsilon_{r1} = 2$ i $\varepsilon_{r2} = 4$.

Oblicz:

(a) Ładunek swobodny na okładkach kondensatora.

(b) Wartości wektorów natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$, indukcji elektrostatycznej $\vec{D}$ i polaryzacji elektrycznej $\vec{P}$ w obu dielektrykach.

(c) Napięcie na kondensatorze po włożeniu płytki.

(d) Pojemność kondensatora z obu dielektrykami.

Rozwiązanie

(a) Ładunki na okładkach kondensatora równają się:

$$q = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 = 8,9 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

(b) Wartości: natężenia pola elektrycznego w dielektrykach:

$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_{r1}} = \frac{U_0}{\varepsilon_{r1} d_0} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_{r2}} = \frac{U_0}{\varepsilon_{r2} d} = 2,5 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

indukcji elektrycznej:

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} = 8,85 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2 = \varepsilon_0 \frac{U_0}{d} = 8,85 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

czyli $D_1 = D_2$.

wektora polaryzacji:

$$P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)E_1 = 4,4 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

$$P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)E_2 = 6,64 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

(c) Napięcie na kondensatorze po włożeniu płytek:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^d E_2 dx = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \\ &= \frac{U_0}{\varepsilon_{r1} d} d_1 + \frac{U_0}{\varepsilon_{r2} d} d_2 = \frac{U_0}{d} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} \right) \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$U = 30 V$$

(d) Pojemność kondensatora z dielektrykiem liczymy z wzoru definicyjnego:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_0}{U_0} \frac{d}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = C_0 \frac{d}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = 3 \cdot 10^{-11} F$$