

Kwantowa natura promieniowania elektromagnetycznego

Efekt Comptona.

Zadanie 1.

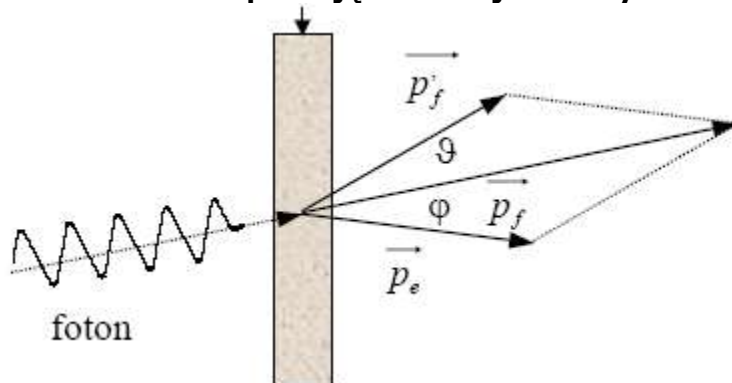
Foton jest rozpraszany na swobodnym elektronie. Wyznaczyć zmianę długości fali fotonu w wyniku rozproszenia.

Rozwiązanie

Ponieważ układ foton–swobodny elektron jest odizolowany od otoczenia możemy zastosować zasadę zachowania energii i pędu. Zakładamy, że pęd i energia kinetyczna swobodnego elektronu są w przybliżeniu równe zero. Takie przybliżenie można zrobić dla elektronu w atomie jeśli energia kwantu jest dużo większa od jego energii wiązania.

Zjawisko Comptona można przedstawić na rysunku:

cienka warstwa rozpraszająca a w niej uderzany elektron



Zasada zachowania energii:

$$(1) \quad E_f + m_0 c^2 = E'_f + E_e,$$

$$(2) \quad E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = p_f c$$

gdzie

$$E_f \text{ i } p_f$$

energia i pęd padającego fotonu:

$$E_f = p_f c$$

$$(3) \quad E'_f = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = p'_f c$$

gdzie

$$E'_f \text{ i } p'_f$$

energia i pęd rozproszonego fotonu:

$$E'_f = p'_f c$$

$$(4) E_e = mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

gdzie

$$E_e \text{ i } p_e$$

energia i pęd rozproszonego elektronu.

Podstawiając (2), (3) i (4) do (1) otrzymamy:

$$(5) p_f c + m_0 c^2 = p'_f c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Zasada zachowania pędu:

$$(6) \vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}_e \quad \text{lub} \quad \vec{p}_e = \vec{p}_f - \vec{p}'_f \quad \text{czyli} \quad (\vec{p}_e)^2 = (\vec{p}_f - \vec{p}'_f)^2$$

$$(7) (\vec{p}_e)^2 = (\vec{p}_f - \vec{p}'_f)^2 \quad \text{czyli} \quad p_e^2 = p_f^2 + p_f'^2 - 2\vec{p}_f \vec{p}'_f = p_f^2 + p_f'^2 - 2p_f p'_f \cos \vartheta$$

Wyznaczamy z równania (5) kwadrat pędu elektronu i wstawiamy do równania (7). Otrzymujemy zależność w postaci:

$$(8) 2(p_f - p'_f)m_0 c = 2p_f p'_f - 2p_f p'_f \cos \vartheta,$$

$$(9) (p_f - p'_f)m_0 c = p_f p'_f (1 - \cos \vartheta),$$

$$(10) \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) m_0 c = \frac{h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \vartheta),$$

$$(11) (\lambda - \lambda') m_0 c = h(1 - \cos \vartheta),$$

$$(12) (\lambda - \lambda') = \Delta \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta)$$

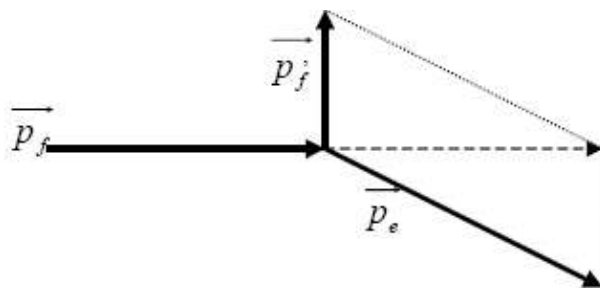
Zadanie 2.

Obliczyć wartość pędu elektronu odrzutu przy rozproszeniu komptonowskim fotonu pod kątem prostym do pierwotnego kierunku ruchu. Długość fali padającego fotonu $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania pędu dla tego zjawiska wynika:

$$\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}_e$$



Ponieważ $\vartheta = 90^\circ$ to

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta) = \frac{h}{m_0 c}$$

czyli,

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

oraz

$$p_e^2 = p_f^2 + p_f'^2 \cdot p_f = \frac{h}{\lambda_f}, \quad p_f' = \frac{h}{\lambda'}$$

$$p_e = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s.}$$

Zadanie 3.

Foton twardego promieniowania rentgenowskiego $\lambda = 0,024 \text{ nm}$ zderzając się ze swobodnym elektronem przekazuje mu **9%** swojej energii. Znaleźć długość fali rozproszonego promieniowania.

Rozwiązanie

$$\lambda' = 0,026 \text{ nm.}$$

Zadanie 4.

Wyznaczyć długość fali promieniowania rentgenowskiego, jeśli wiadomo, że maksymalna energia kinetyczna komptonowskich elektronów odrzutu jest równa $E_{k\max.}$.

Rozwiązanie

Wskazówka:

- 1(1) skorzystać z zasady zachowania energii,
- 2(2) skorzystać ze wzoru Comptona,
- 3(3) zastanowić się dla jakiej wartości kąta ϑ następuje przekazanie maksymalnej energii elektronowi,
- 4(4) znaleźć wzór na energię kinetyczną elektronów jako funkcję długości fali padającego promieniowania,
- 5(5) znaleźć $E_{k\max.}$ jako $E_k(\vartheta = \pi)$.

Taka procedura prowadzi do wyniku:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} \left[\sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{E_{k \max.}}} - 1 \right]$$

Zadanie 5.

Promieniowanie rentgenowskie o długości $\lambda = 0,002 \text{ nm}$ ulega rozproszeniu komptonowskim pod kątem $\theta = 90^\circ$ na elektronie. Oblicz:

a/ zmianę długości fali na skutek rozproszenia

b/ długość fali i pęd rozproszonego fotonu.

Rozwiązanie

$$\Delta\lambda = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}, \quad \lambda' = 4,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}, \quad p_f' = 1,5 \cdot 10^{-22} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

Zadanie 6.

Określić maksymalną zmianę długości fali fotonu o energii $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$ w wyniku jego rozproszenia na swobodnym elektronie, oraz maksymalną energię jaką uzyska odrzucony elektron.

Rozwiązanie

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{m_0 c},$$

$$E_{e \max} = E_\gamma \left[\frac{1}{1 + \frac{m_0 c^2}{2E_\gamma}} \right] = 0,8 \text{ MeV}$$

Zadanie 7.

Pokazać, że elektron swobodny nie może przejąć całej energii padającego nań fotonu (nie może pochłoniąć fotonu).

Rozwiązanie

Założmy, że elektron może całkowicie pochłoniąć padający nań foton.

Korzystamy z zasady zachowania energii i pędu:

$$E_f + m_0 c^2 = E_e$$

przy czym

$$E_e = mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{p}_f &= \vec{p}_e & E_f &= p_f c \\ p_f c + m_0 c^2 &= \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{aligned}$$

czyli

$$\sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} = p_e c + m_0 c^2$$

To ostatnie równanie jest prawdziwe gdy:

$$2p_e m_0 c^3 = 0$$

co oznacza, że pęd elektronu a także pęd fotonu jest równy zero. Otrzymany wynik jest sprzeczny z założeniami.

Zadanie 8.

Udowodnić, że swobodny elektron nie może emitować fotonów.

Rozwiązanie

Wskazówka: procedura rozwiązania jest podobna rozwiązania zadania 7.

Zadanie 9.

Znaleźć związek między energią kinetyczną komptonowskiego elektronu i kątem jego rozproszenia. Dane: energia fotonu E_γ .

Rozwiązanie

- 1(1) narysować rysunek ilustrujący zjawisko w układzie współrzędnych **XY**,
- 2(2) napisać prawo zachowania energii,
- 3(3) napisać prawo zachowania pędu,
- 4(4) z układu równań wyeliminować kąt ϑ ,
- 5(5) skorzystać z zależności między pędem fotonu i jego energią,

$$E_e = E_\gamma \frac{2 \cos^2 \varphi}{2 + \frac{m_0 c^2}{E_f} + (1 - \cos^2 \varphi) \frac{E_f}{m_0 c^2}}$$